

8. Wechselwirkungen von Wänden mit elastischen Spannungen

Zwischen der magnetischen Struktur und den Gitterdeformationen eines Kristallgitters existiert eine Wechselwirkung, die sich am anschaulichsten im Phänomen der Magnetostriktion äußert. Diese "magnetoelastischen" Wechselwirkungen beeinflussen naturgemäß auch die Struktur der Blochwände. Dabei ist zu unterscheiden zwischen den Einwirkungen äußerer oder innerer Spannungen nicht magnetischen Ursprungs auf die Wandstruktur einerseits und den innerhalb der Blochwand infolge der inhomogenen Magnetisierung selbst erzeugten Spannungen und deren Rückwirkungen auf die Wandstruktur andererseits. Beide Problemkreise lassen sich mit Hilfe zweier Potentiale untersuchen:

- 1) dem elastischen Potential, das die elastische Rückwirkung des Gitters auf eine Verzerrung wiedergibt, und das als unabhängig von der magnetischen Struktur angenommen werden kann,
- 2) einer magnetoelastischen Wechselwirkungsenergie, die die Verknüpfung der magnetischen Struktur mit den elastischen Distorsionen wiedergibt. Beide Potentiale sind also Funktionen der elastischen Distorsion des Kristalls, einem i. a. asymmetrischen Tensor, der sich aus dem symmetrischen Anteil, den Verzerrungen oder Deformationen und dem antisymmetrischen Anteil, den Gitterdrehungen oder Rotationen, zusammensetzt. Da alle in Frage kommenden Distorsionen als sehr klein gegen Eins angesehen werden können, wird man beide Potentiale nach den Distorsionen entwickeln und sich mit dem jeweils niedrigsten nicht verschwindenden Glied begnügen. Demnach ist die elastische Energie eine quadratische Form in den Distorsionen (da sich das unverzerrte Gitter im Gleichgewicht befinden soll), während bei der magnetoelastischen Energie schon die lineare Näherung in den Distorsionen ausreicht.

Im folgenden seien zunächst einige allgemeine Gesetze in Bezug auf diese beiden Potentiale sowie ihre spezielle Gestalt im kubischen und im hexagonalen Kristallsystem angegeben.

8.1 Die elastische Energie und das Hookesche Gesetz

Wir schreiben nach dem Vorhergesagten die elastische Energie in der folgenden Form:

$$e_{el} = \frac{1}{2} c_{iklm} \beta_{ik} \beta_{lm} \quad (8.1)$$

(über gleichlautende Indizes möge wie üblich summiert werden)
Der Tensor \underline{c} besitzt, wie aus der Elastizitätstheorie [8.1] bekannt, die Symmetrieeigenschaften:

$$c_{iklm} = c_{lmik} = c_{kilm} = c_{ikml} \quad (8.2)$$

In diesen Symmetrierelationen kommt bereits zum Ausdruck, daß die gewöhnliche elastische Energie nicht von den Gitterrotationen abhängt.

Zu \underline{c} existiert ein inverser Tensor \underline{s} mit den gleichen Symmetrien und der Eigenschaft:

$$c_{ikrs} s_{rslm} = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) \quad (8.3)$$

β in Gl. (8.1) möge die (im allgemeinen asymmetrische) elastische Distorsion des Gitters bedeuten. Auf Grund der Symmetrien (8.2) kann man in (8.1) ebensogut auch die elastischen Verzerrungen

$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\beta_{ik} + \beta_{ki})$ einsetzen.

Die elastische Spannung $\underline{\sigma}$ ergibt sich aus (8.1) zu:

$$\sigma_{ik} = c_{iklm} \beta_{lm} = c_{iklm} \epsilon_{lm} \quad (8.4)$$

Dies ist das Hookesche Gesetz in seiner allgemeinen Form.

Der Spannungstensor $\underline{\sigma}$ ist stets symmetrisch, auch wenn β un-symmetrisch sein sollte. Die Deformation ϵ berechnet sich umgekehrt aus σ gemäß:

$$\epsilon_{ik} = s_{iklm} \sigma_{lm} \quad (8.4a)$$

Im kubischen Kristallsystem gibt es drei wesentlich verschiedene Konstanten c_{iklm} , die meist in der folgenden (Voigtschen) Form abgekürzt werden:

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{1111} = c_{3333}, \\ c_{12} &= c_{1122} = c_{2233} \quad \text{und} \quad c_{44} = c_{1212} = c_{1221} = c_{2323} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Alle Komponenten, die aus den obigen nicht durch die Symmetrioperationen (8.2) hervorgehen, wie z.B. c_{1112} oder c_{1123} , verschwinden.

Der zu \underline{c} inverse Tensor \underline{s} ergibt sich aus (8.3) mit der Abkürzung

$$N = (c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12}) \quad \text{zu}$$

$$s_{1111} = (c_{11} + c_{12})/N, \quad s_{1122} = -c_{12}/N, \quad s_{1212} = 1/(4c_{44}) \quad (8.6)$$

Bei hexagonalen Kristallen gibt es 5 wesentlich verschiedene Konstanten:

$$c_{11} = c_{1111} = c_{2222},$$

$$c_{33} = c_{3333},$$

$$c_{12} = c_{1122},$$

$$c_{13} = c_{1133} = c_{2233},$$

$$c_{44} = c_{1313} = c_{2323},$$

$$c_{1212} \text{ ergibt sich zu } (c_{11} - c_{12})/2. \quad (8.7)$$

Der reziproke Tensor berechnet sich mit den Abkürzungen:

$$N_1 = c_{11}c_{33} - c_{13}^2, \quad N_2 = c_{12}c_{33} - c_{13}^2, \quad N_3 = (c_{11} - c_{12})(N_1 + N_2) \quad \text{zu:}$$

$$s_{1111} = N_1/N_3, \quad s_{1122} = -N_2/N_3, \quad s_{3333} = (c_{11} + c_{12})/(N_1 + N_2),$$

$$s_{1133} = -c_{13}/(N_1 + N_2), \quad s_{1313} = 0.25/c_{44}, \quad s_{1212} = 0.5/(c_{11} - c_{12}). \quad (8.8)$$

8.2. Magnetoelastische Wechselwirkungsenergien

In der Einleitung zu Abschn. 8 hatten wir erläutert, daß die Kopplung der Gitterverzerrungen an die Magnetisierung in ausreichender Näherung durch eine lineare Form in den Distorsionen beschrieben

werden kann: $e_\beta = L_{ik}(\alpha_i) \cdot \beta_{ik}$. Der Tensor \underline{L} , der die Dimension einer Spannung besitzt, ist als Funktion der Komponenten des Magnetisierungsvektors α_i zu betrachten. Wir spalten diese Energie in zwei Anteile auf, die Wechselwirkungsenergie mit den Verzerrungen $\underline{\epsilon}$ und die Wechselwirkungsenergie mit den Gitterrotationen $\underline{\omega}$:

$$e_\beta = e_\epsilon + e_\omega = L_{ik}^\epsilon \cdot \epsilon_{ik} + L_{ik}^\omega \cdot \omega_{ik} \quad (8.9)$$

Der Tensor \underline{L}^ϵ ist mit der Erscheinung der Magnetostriktion verknüpft, während sich \underline{L}^ω aus der Kristallanisotropieenergie ableiten läßt.

a) Wechselwirkungen der Magnetisierung mit den elastischen Deformationen

Der Tensor \underline{L}^ϵ muß als Funktion der Magnetisierung der jeweiligen Gittersymmetrie folgen. Z.B. ergibt sich für kubische Kristalle [8.2]

$$L_{ik}^\epsilon = \begin{cases} -3C_2 \lambda_{100} (\alpha_i^2 - 1/3) & \text{für } i=k \\ -3C_3 \lambda_{111} \alpha_i \alpha_k & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad (8.10)$$

$C_2 = (c_{11} - c_{12})/2$ und $C_3 = c_{44}$ sind gebräuchliche Abkürzungen für zwei elastische Konstanten (Schubmoduln). Die beiden phänomenologischen Konstanten λ_{100} und λ_{111} sind identisch mit den magnetostriktiven Dehnungen eines Kristalls bei Sättigung in [100]- bzw. [111]-Richtung relativ zu einem gedachten unmagnetischen Zustand.

Anstelle der Gitterdeformationen können wir in $e_\epsilon = L_{ik}^\epsilon \epsilon_{ik}$ auch die zugehörigen Spannungen einsetzen, die nach Gl. (8.4) zu berechnen sind. Wir erhalten dann eine einfache Form für die Wechselwirkungsenergie der Magnetisierung mit elastischen Spannungen, die insbesondere in dem Fall zweckmäßig ist, daß die Spannungen nicht magnetischen Ursprungs sind:

$$e_\sigma = -3\lambda_{100} \sum_i \sigma_{ii} (\alpha_i^2 - 1/3) - 3\lambda_{111} \sum_{i>k} \sigma_{ik} \alpha_i \alpha_k \quad (8.11)$$

Für hexagonale Kristalle empfiehlt sich ein kubisches Koordinatensystem mit der c-Achse als dritter Achse, da die elastische Energie

und in guter Näherung auch alle magnetischen Potentiale isotrop in Bezug auf Drehungen um die c-Achse sind. Es ergibt sich dann für den magnetoelastischen Tensor:

$$L_{ii}^E = -(c_{11}\lambda_A + c_{12}\lambda_B)\alpha_i^2 - (c_{11}\lambda_B + c_{12}\lambda_A)\alpha_k^2 - c_{13}\lambda_C(1-\alpha_3^2)$$

für $i=1, k=2$ oder $i=2, k=1$

$$L_{12}^E = L_{21}^E = -(c_{11} - c_{12})(\lambda_A - \lambda_B)\alpha_1\alpha_2$$

$$L_{i3}^E = -2c_{44}\lambda_E\alpha_i\alpha_3 \quad \text{für } i=1,2$$

$$L_{33}^E = -[c_{13}(\lambda_A + \lambda_B) + c_{33}\lambda_C](1-\alpha_3^2) \quad (8.12)$$

und für die magnetoelastische Energie in der Spannungsschreibweise:

$$e_\sigma = -(\lambda_A\alpha_1^2 + \lambda_B\alpha_2^2)\sigma_{11} - (\lambda_A\alpha_2^2 + \lambda_B\alpha_1^2)\sigma_{22} - \lambda_C(1-\alpha_3^2)\sigma_{33} \\ - 2(\lambda_A - \lambda_B)\alpha_1\alpha_2\sigma_{12} - 2\lambda_E(\alpha_1\alpha_3\sigma_{13} + \alpha_2\alpha_3\sigma_{23}). \quad (8.13)$$

Werte für die Magnetostruktionskonstanten λ_A bis λ_D findet man in Handbüchern [2.2]. Zur Abkürzung wurde die Konstante $\lambda_E = 2\lambda_D - (\lambda_A + \lambda_C)/2$ eingeführt.

In der Literatur [8.3] finden sich auch Ausdrücke für die magnetoelastische Kopplungsenergie, die höhere Potenzen der α_i und damit eine größere Zahl unabhängiger Magnetostruktionskonstanten enthalten. Ebenso finden sich Ansätze für andere Kristallsysteme. Schließlich wäre noch zu erwähnen, daß auch magnetoelastische Kopplungsenergien, die Ableitungen der Magnetisierungskomponenten enthalten, in der Literatur angegeben werden [8.4]. Über ihre Größe ist nichts Genaueres bekannt, und wir wollen sie im folgenden außer Betracht lassen.

b) Die Wechselwirkung der Magnetisierung mit Gitterrotationen

Zur Berechnung des Beitrages \underline{L}^ω zu Gl.(8.9) gehen wir von folgender Überlegung aus [7.3]:

Zeige die Magnetisierung, etwa unter dem Einfluß äußerer Felder, in eine bestimmte Richtung, und stellt man sich nun das Gitter um einen kleinen Betrag gedreht vor, so verändert sich der Wert der Kristallenergie, da dieser stets relativ zum Kristallsystem zu berechnen ist. Die magnetostatische Energie in dem äußeren Feld bleibt bei dieser Gitterdrehung unverändert.

Die Rotation werde durch den antisymmetrischen Tensor $\omega_{ik} = \frac{1}{2}(\beta_{ik} - \beta_{ki})$ beschrieben. Dann läßt sich die gesuchte Änderung der Kristallenergie berechnen, indem man die Energieänderung bei einer infinitesimalen Drehung der Magnetisierung um $-\omega_{ik}$ berechnet. Die Komponente $L_{12}^\omega = -L_{21}^\omega$ ergibt sich durch eine geeignete Entwicklung der Funktion $e_K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ gemäß:

$$L_{12}^\omega = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{12}} e_K(\alpha_1 - \alpha_2 \omega_{12}, \alpha_2 + \alpha_1 \omega_{12}, \alpha_3) \Big|_{\omega_{12}=0} \quad (8.14)$$

Im einzelnen erhält man für den Tensor \underline{L}^ω im kubischen Kristallsystem:

$$L_{ik}^\omega = \alpha_i \alpha_k (\alpha_i^2 - \alpha_k^2) [K_1 + K_2 (1 - \alpha_i^2 - \alpha_k^2)] \quad (8.15)$$

Und im hexagonalen System:

$$L_{i3}^\omega = -L_{3i}^\omega = -\alpha_i \alpha_3 [K_1 + 2K_2 (1 - \alpha_i^2)] \quad \text{für } i=1,2, \quad (8.16)$$

$$L_{12}^\omega = 0$$

Die Magnetorotationsenergie verschwindet für alle Richtungen, für die die Kristallenergie stationär ist, insbesondere also für die leichten Richtungen.

8.3 Die spontane Magnetostraktion

Die Erscheinung der Magnetostraktion ist eng mit der im letzten Abschnitt eingeführten magnetoelastischen Wechselwirkungsenergie verknüpft, wie aus folgender Überlegung ersichtlich wird: Denken wir uns einen Kristall zunächst in einem unmagnetischen Ausgangszustand und "schalten" dann die magnetoelastischen Kopplung ein.

Der Kristall sei homogen magnetisiert und unterliege keinen äußeren Beschränkungen. Er wird sich dann unter der Wirkung von e_ϵ spontan deformieren, bis die elastische Energie e_{e1} der magnetoelastischen Energie e_ϵ das Gleichgewicht hält. Diese Gleichgewichtsdeformation bezeichnet man als die spontane Magnetostriktion. Sie berechnet sich durch Minimalisierung von $e_{e1} + e_\epsilon$ bezüglich $\underline{\epsilon}$ zu:

$$\epsilon_{ik}^{(fr)} = -s_{iklm} L_{lm}^\epsilon \quad (8.17)$$

Diese Deformation wollen wir auch die freie Deformation nennen, da sie an einem freien, nicht eingespannten Kristall beobachtet wird. $\underline{\epsilon}^{(fr)}$ ist im Gegensatz zu \underline{L}^ϵ direkt meßbar, weshalb man in der Regel die Umkehrung von (8.17) dazu benutzt, um \underline{L}^ϵ zu bestimmen. Die Energie des Kristalls ist durch diesen Entspannungsvorgang gegenüber dem unmagnetischen Zustand abgesenkt, und zwar um den Betrag:

$$e_{fr} = -\frac{1}{2} c_{iklm} \epsilon_{ik}^{(fr)} \epsilon_{lm}^{(fr)} = -\frac{1}{2} s_{iklm} L_{ik} L_{lm} \quad (8.18)$$

Der Tensor \underline{L} erhält eine anschauliche Bedeutung, wenn man sich einen homogen magnetisierten Kristall eingespannt und festgehalten vorstellt. \underline{L}^ϵ bedeutet dann diejenige Spannung, die notwendig ist, um ein Volumenelement vom freien Zustand in den festgehaltenen Zustand zu überführen. \underline{L}^ω bedeutet das von der Magnetisierung auf das Gitter ausgeübte Moment. Beide Spannungen zusammen würden man in der Theorie der inneren Spannungen [8.6] als die quasiplastische Spannung bezeichnen.

8.4 Der Einfluß äußerer Spannungen auf die Wandstruktur

Die Potentiale (8.11) bzw. (8.13) stellen zusätzliche Beiträge zur Funktion $G(\theta_i)$ (3.1) dar, wenn die Spannungen $\underline{\sigma}$ von der Magnetisierung nicht abhängen. Dabei können diese Spannungen sowohl äußere Spannungen im eigentlichen Sinne als auch innere Spannungen nichtmagnetischen Ursprungs sein, also z.B. von Versetzungen oder Temperaturgradienten erzeugte Spannungen.

Ein einfaches Beispiel möge die Wirkung von Spannungen auf die Wandstruktur erläutern: An einem Eisenkristall sei eine Zugspannung σ_{11} längs der [100]-Achse angelegt, die zugleich die Achse der

Magnetisierung in zwei Domänen sei. Dann tritt zum Potential für eine 180° -Wand (5.2) ein zusätzlicher Term $-3 \cdot \lambda \cdot \sigma_{11} \cdot \cos^2 \theta$ hinzu. Der Parameter κ in Gleichung (4.1) bis (4.5) wird nun

$$\kappa = \frac{-(1 - \sin^2 \psi \cos^2 \Psi)}{1 + 3\lambda\sigma/K_1} \quad (8.19)$$

Damit gilt $\kappa > -1$ für $\sigma > 0$, d.h. die 180° -Wand bleibt auch für $\psi = 0^\circ$ endlich. Geringe äußere Spannungen können also die Wandweite von 180° -Wänden drastisch verändern.

8.5 Die magnetostriktive Eigenenergie in Blochwänden

a) Qualitative Einführung und Übersicht

Nachdem in Abschnitt 8.4 von Spannungen nicht-magnetischen Ursprungs die Rede war, wollen wir uns nun mit den von den Magnetisierungsänderungen selbst erzeugten Spannungen beschäftigen. Solche Spannungen können dann auftreten, wenn die Magnetisierungsstruktur inhomogen ist. Ausgehend vom unmagnetischen Zustand würden sich alle Volumelemente, wenn sie voneinander isoliert wären, gemäß Gl. (8.17) entspannen. Da aber der Kristall seinen Zusammenhalt bewahren muß, kann die wirkliche Verzerrung nicht überall den optimalen Wert der freien Verzerrung (8.17) annehmen, und die Energie ist folglich gegenüber (8.18) erhöht. Diese zusätzliche Energie nennen wir die magnetostriktive Eigenenergie der betreffenden Bereichsstruktur. An Hand der in Fig. 8.1 dargestellten (100) - 180° -Wand läßt sich erläutern, auf welche Weise dieser Mechanismus die Wandstruktur beeinflusst. Diese Wand hätte in einem kubischen Material eine unendlich große Wandweite (s. Abschn. 5.2a), wenn man nur die Kristallenergie berücksichtigt. Der Grund dafür ist, daß der Magnetisierungsvektor in der Mitte der Wand bei dieser Orientierung genau durch eine weitere leichte Richtung, die $[100]$ -Richtung, hindurchdreht. Die Wand ist dann bestrebt, unter Bildung eines neuen, in $[001]$ -Richtung magnetisierten Bereichs in zwei 90° -Wände zu zerfallen. Betrachtet man jedoch die "freien" magnetostriktiven Verzerrungen der so entstehenden drei Bereiche (Fig. 8.1), so erkennt man, daß die Verzerrung des mittleren Bereichs nicht mit den Verzerrungen der

beiden äußeren Bereiche verträglich oder kompatibel ist. Dem mittleren Bereich wird der Verzerrungszustand der beiden äußeren Domänen aufgeprägt, er besitzt folglich eine erhöhte Energie, und diese führt ähnlich wie im Fall einer äußeren Zuspansung (Abschn.8.4) zu einer endlichen Wandweite. Die frühesten Rechnungen zu diesem Effekt finden sich in den Arbeiten von Lifshitz [4.1] und Néel [4.2] aus dem Jahre 1944. Néel diskutierte auch bereits 90° -Wände und wies darauf hin, daß für diesen Wandtyp zwei Fälle möglich sind: Wenn die auf die Wand projizierten freien Verzerrungen der beiden Bereiche gleich sind, dann passen die beiden Bereiche - ähnlich wie bei einer kristallographischen Zwillingsgrenze - zusammen. Innere Spannungen ergeben sich allenfalls innerhalb der Wandzone. Sind die Projektionen nicht gleich, so entstehen notwendigerweise Spannungen an der Grenzfläche, die sich in beiden Domänen bis ins Unendliche erstrecken. (110) - 90° -Wände ($\Psi=90^\circ$) gehören zur ersten Kategorie, alle übrigen 90° -Wände zur zweiten. Die Spannungen bei einer Wand mit weitreichendem Spannungsfeld verhalten sich ähnlich wie das magnetische Feld einer Wand, bei der die Normalkomponenten der Magnetisierung in den beiden Bereichen verschieden sind. Solche Wände nennt man magnetisch geladene Wände. Analog hierzu könnte man auch von "magnetostraktiv geladenen" Wänden sprechen.

Für alle Wände in Eisen und Nickel, die nur lokalisierte Spannungen aufweisen, hat Rieder [8.5] die magnetostraktiven Eigenenergien und -spannungen in systematischer Weise berechnet. Bei den magnetostraktiv geladenen Wänden beschränkt er sich jedoch auf die Angabe der weitreichenden Komponenten. Es ist natürlich wünschenswert, auch diese Wände berechnen zu können. Dabei sollte nach Möglichkeit auch der Einfluß der Gitterrotationen mit erfaßt werden, der in Rieders Rechenverfahren nicht enthalten ist. Wir wollen deshalb hier eine möglichst allgemeine, nicht auf spezielle Kristallsysteme und Wandorientierungen zugeschnittene Theorie entwickeln.

Alleinige Voraussetzungen sollen sein:

- 1) Die Wand muß eben und unendlich ausgedehnt sein (eindimensionales Problem)
- 2) Die elastische Energie des Kristalls kann durch eine quadratische Form in den Verzerrungen dargestellt werden (Lineare Elastizitätstheorie). Die elastischen Konstanten sollen nicht von der

Magnetisierung abhängen.

- 3) Die magnetoelastische Wechselwirkungsenergie kann durch eine lineare Form in den elastischen Distorsionen hinreichend gut beschrieben werden.
- 4) Es sollen keine plastischen Deformationen oder magnetische Nachwirkungen auftreten.

b) Die Definition der magnetostriktiven Eigenenergie

Zunächst wollen wir eine genaue Definition der zu berechnenden magnetostriktiven Eigenenergie geben. Als Bezugs- und Ausgangspunkt sowohl für die Verzerrungen als für die Energie benutzen wir im folgenden stets einen gedachten unmagnetischen Zustand, in dem die magnetoelastische Energie nicht wirksam ist (s. Fig. 8.2). Nehmen wir nun zunächst an, daß zwischen den einzelnen Volumenelementen des Kristalls keine elastischen Wechselwirkungen bestehen (indem wir uns den Kristall in kleine, nicht zusammenhängende Elemente zerlegt denken), dann nimmt jedes Volumenelement die als spontane Magnetostriktion bekannte Verzerrung $\beta^{fr}(\underline{r})$ an, wobei sich die Energie um den Betrag $e_{fr}(\underline{r})$ absenkt. Gehen wir nun zurück zum unmagnetischen Zustand, fügen den Kristall wieder zusammen und schalten die magnetoelastische Wechselwirkung wieder ein, so stellt sich im allgemeinen eine andere Verzerrung $\beta^o(\underline{r})$ ein, deren Energie auf Grund der einschränkenden Nebenbedingung der Kompatibilitätsbedingungen höher als e_{fr} sein kann. Die Differenz zwischen beiden Energien bezeichnen wir als die magnetostriktive Eigenenergie:

$$E_{ms} = \int [e_{\beta}(\beta^o(\underline{r})) + e_{el}(\beta^o(\underline{r}) - \beta^{fr}(\underline{r}))] dv \quad (8.20)$$

Im allgemeinen Fall vermittelt diese Energie ebenso wie die Streufeldenergie eine nicht lokale, weitreichende Wechselwirkung (Die Verzerrung $\beta^o(\underline{r}_o)$ an einem Punkte \underline{r}_o läßt sich wie das Streufeld durch eine Integration über das ganze Probenvolumen aus einem Quellenfeld - in diesem Fall z.B. aus $\text{Div}(\underline{L} - \underline{L})$ - berechnen [8.6]. Ähnlich wie im Fall des Streufeldes reduziert sich jedoch die Wechselwirkung bei eindimensionalen Problemen, die wir im folgenden behandeln wollen, auf eine lokale Wechselwirkung.

c) Die Berechnung der magnetostriktiven Eigenenergie für ein-dimensionale Probleme

Gemäß Voraussetzung 3) in Abschn.a) schreiben wir die magnetoelastische Wechselwirkungsenergie in der Form (8.9). Der Tensor $\underline{L} = \underline{L}^\epsilon + \underline{L}^\omega$ ist dabei im allgemeinen unsymmetrisch. Wenn auch der Mittelwert \bar{L} von \underline{L} unsymmetrische Komponenten enthält, dann hat der Kristall das Bestreben, sich als ganzes unbeschränkt zu drehen, da einer solchen Drehung keine elastische Energie entgegensteht. In diesem Fall kompensieren wir den unsymmetrischen Anteil des Mittelwerts mit Hilfe einer "Haltdrehung". Wir gehen also von \underline{L} zu dem Tensor \underline{L}^* :

$$L_{ik}^* = L_{ik} - \frac{1}{2}(\bar{L}_{ik} - \bar{L}_{ki}) \quad (8.21)$$

mit $L_{ik}^* = L_{ki}^*$ über, mit dem sich die magnetoelastische Energie nun in der Form

$$e_\beta^* = L_{ik}^* \beta_{ik} \quad (8.22)$$

schreibt.

Zur Berechnung der Gleichgewichtsdistorsion β^0 im Falle einer inhomogenen Magnetisierung wird folgendes Verfahren angewandt: Zunächst beschränken wir die Mannigfaltigkeit der erlaubten β^0 auf solche, die sich aus einer Verschiebung ableiten lassen; wir berücksichtigen also vorweg die Kompatibilitätsbedingungen. Das ist im Fall eines eindimensionalen Problems leicht möglich. Bezüglich der verbleibenden Mannigfaltigkeit von Distorsionen wird die Gesamtenergie $e_G = e_{el} + e_\beta^*$ optimiert und damit β^0 gewonnen.

Zunächst zur Kompatibilitätsbedingung: Sie lautet in ihrer allgemeinen Form $\text{Rot}\beta = 0$ und stellt somit eine komplizierte Differentialgleichung dar. Für ein eindimensionales Problem reduziert sie sich jedoch auf die einfache Bedingung:

$$\frac{d}{dx}(\underline{n} \times \underline{\beta}) = 0 \text{ oder} \\ \beta_{ik} = \bar{\beta}_{ik} + n_i k_k(x) \quad (8.23)$$

wobei $\bar{\beta}$ ein konstanter Tensor, \underline{n} die Normalenrichtung und

\underline{k} ein beliebiger Vektor sei, der als Funktion von x noch genauer zu bestimmen ist. Wir können noch verlangen, daß der Mittelwert von $n_i k_k$ verschwinden möge, indem wir einen eventuell vorhandenen Mittelwert zu $\bar{\beta}$ schlagen. Da das Volumen der Wand gegen das Volumen der Bereiche zu vernachlässigen ist, kann man dann $\bar{\beta}$ gleich dem Mittelwert der Verzerrungen in den Bereichen setzen. Um diesen Mittelwert zu berechnen, nutzen wir einen Satz aus der Theorie der inneren Spannungen aus. Danach ist stets in einem Einkristall der Mittelwert der wirklichen Verzerrungen gleich dem Mittelwert der (gedachten) freien Verzerrungen*. Die mittlere Rotation des Kristalls soll verschwinden, so daß unter Ausnutzung von Gl.(8.17) für zwei gleich große Bereiche folgt:

$$\bar{\beta}_{ik} = \frac{1}{2}(\beta_{ik}^{(fr,a)} + \beta_{ik}^{(fr,e)}) = -\frac{1}{2}s_{iklm} (L_{lm}^*(a) + L_{lm}^*(e)) = -s_{iklm} \bar{L}_{lm}^* \quad (8.24)$$

$\beta_{ik}^{(fr,a)}$ und $\beta_{ik}^{(fr,e)}$ bezeichnen die freien Magnetostriktionen der beiden Bereiche, entsprechend für \underline{L}^* . Der Mittelwert \bar{L}^* ist nach (8.21) ein symmetrischer Tensor.

Wir setzen nun Gl.(8.23) in (8.1) und (8.9) ein:

$$\begin{aligned} e_{el} &= \frac{1}{2}(\bar{\beta}_{ik} + n_i k_k)(\bar{\beta}_{lm} + n_l k_m) c_{iklm} \\ &= \frac{1}{2} \bar{L}_{ik}^* \bar{L}_{lm}^* s_{iklm} - n_i k_k \bar{L}_{ik}^* + \frac{1}{2} n_i n_l k_k c_{iklm} \end{aligned} \quad (8.25)$$

$$e_{\beta} = (\bar{\beta}_{ik} + n_i k_k) L_{ik}^* = -\bar{L}_{ik}^* s_{iklm} + n_i k_k L_{ik}^* \quad (8.26)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} e_G &= e_{el} + e_{\beta} = \left(\frac{1}{2} \bar{L}_{ik}^* - L_{ik}^*\right) \bar{L}_{lm}^* s_{iklm} \\ &\quad + n_i k_k (L_{ik}^* - \bar{L}_{ik}^*) + \frac{1}{2} n_i n_l k_k c_{iklm} \end{aligned} \quad (8.27)$$

Minimalisiert man die Gesamtenergie e_G bezüglich der bisher unbekanntenen Funktionen $k_k(x)$ so ergibt sich:

* Dieser Satz leitet sich aus dem bekannteren Satz von Albenga [8.6] folgendermaßen ab: Der wirkliche Zustand des Kristalls $\underline{\beta}^0(\underline{r})$ unterscheidet sich vom freien Zustand $\underline{\varepsilon}^{(fr)}(\underline{r})$ um den Verzerrungstensor

$$n_i(L_{ik}^* - \bar{L}_{ik}^*) + n_i n_k c_{iklm} = 0 \quad (8.28)$$

Nunmehr definieren wir den symmetrischen Tensor:

$$\Gamma_{km} = n_i n_l c_{iklm} \quad (8.29)$$

Dieser ergibt sich in einem kubischen Kristallsystem zu:

$$\Gamma_{ik} = \begin{cases} c_{44} + (c_{11} - c_{44})n_i n_k & \text{für } i=k \\ (c_{12} + c_{44})n_i n_k & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad (8.30)$$

Entsprechend gilt für hexagonale Kristalle:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{kk} &= c_{11}n_k^2 + c_{66}n_l^2 + c_{44}n_3^2 \\ \Gamma_{kl} &= (c_{12} + c_{66})n_k n_l \\ \Gamma_{k3} &= (c_{13} + c_{44})n_k n_3 \\ \Gamma_{33} &= c_{44} + (c_{33} - c_{44})n_3^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für } k=1, l=2 \\ \text{und } k=2, l=1 \end{array} \quad (8.31)$$

Sei $\underline{\Gamma}^{-1}$ der zu $\underline{\Gamma}$ inverse Tensor ($\Gamma_{ik}^{-1} \Gamma_{kl} = \delta_{il}$), dann erhält man k_i explizit:

$$k_i = -\Gamma_{il}^{-1} n_k (L_{kl}^* - \bar{L}_{kl}^*) \quad (8.32)$$

und damit den optimalen Wert der Gesamtenergie:

$$e_g^o = \frac{1}{2} (L_{ik}^* - \bar{L}_{ik}^*) L_{lm}^* S_{iklm} - \frac{1}{2} \Gamma_{km}^{-1} n_i n_l (L_{ik}^* - \bar{L}_{ik}^*) (L_{lm}^* - \bar{L}_{lm}^*) \quad (8.33)$$

Mit Gl.(8.17) und den ursprünglichen Tensoren \underline{L} (anstelle von \underline{L}^* , s.Ge.(8.21), erhalten wir die magnetostriktive Eigenenergie in der

$\underline{\varepsilon}^o - \underline{\varepsilon}(fr)$. Dieser Unterschied muß durch eine innere Spannung hervorgerufen sein, deren Mittelwert nach dem Satz von Albenga verschwinden muß: $c \cdot (\underline{\varepsilon}^o - \underline{\varepsilon}(fr)) = 0$. Da \underline{c} homogen sein soll, folgt $\underline{\varepsilon}^o = \underline{\varepsilon}(fr)$.

folgenden einfachen Form:

$$e_{ms} = e_g^o - e_{fr} = \frac{1}{2}(L_{ik} - \bar{L}_{ik})(L_{lm} - \bar{L}_{lm}) \tilde{s}_{iklm} \quad (8.34)$$

$$\text{mit } \tilde{s}_{iklm} = s_{iklm} - n_i n_l \Gamma_{km}^{-1} \quad (8.35)$$

Der Tensor \tilde{s} berechnet sich ausschließlich aus den elastischen Konstanten \underline{c} und dem Normalenvektor \underline{n} . Er stellt eine Art Projektion des ursprünglichen Tensors \underline{s} auf die Wandfläche dar und besitzt nur die folgende, leicht zu verifizierende Symmetrieeigenschaft:

$$\tilde{s}_{iklm} = \tilde{s}_{lmik} \quad (8.36)$$

Gl.(8.34) gilt grundsätzlich in jedem Koordinatensystem. Jedoch ist es meist zweckmäßig, im jeweiligen Kristallsystem zu rechnen, da die Tensoren \underline{c} und \underline{L} in diesem System unmittelbar aus der Literatur entnommen werden können.

Bemerkenswert ist die enge Analogie zwischen Gl.(8.34) und Gl.(6.9) für die magnetische Streufeldenergie, die besonders deutlich wird, wenn man letztere etwas umformt:

$$e_s = \frac{1}{2}(\alpha_i - \bar{\alpha}_i)(\alpha_k - \bar{\alpha}_k) n_i n_k 4\pi I_s^2 \quad (6.9a)$$

In Gl.(8.34) tritt an die Stelle der Magnetisierungsrichtung $\underline{\alpha}$ der aus dieser zu berechnende Spannungstensor $\underline{L}(\alpha)$, und an die Stelle des Tensors $n_i n_k 4\pi I_s^2$ tritt der aus der Normalenrichtung \underline{n} und den elastischen Konstanten zu berechnende Tensor \underline{s}^* . In beiden Formeln erscheint außer den lokalen Größen $\underline{\alpha}$ bzw. $\underline{L}(\alpha)$ auch der jeweilige Mittelwert dieser Größen über die benachbarten Domänen.

8.6 Die magnetischen Eigenspannungen

Die inhomogene Magnetisierungsstruktur führt nicht nur zu einer magnetostriktiven Eigenenergie, sondern - damit verknüpft - auch zu inneren Spannungen. Wenn der Kristall sich magnetostriktiv nicht verzerren würde, dann wären die Spannungen einfach durch den Tensor $\underline{L} = \underline{L}^{\omega} + \underline{L}^E$ gegeben. Der unsymmetrische Bestandteil, die von der

Magnetisierung ausgeübten Momente \underline{L}^ω , verändert sich in unserer Näherung durch die Verzerrung nicht. Den Mittelwert von \underline{L}^ω denken wir uns wieder durch eine Halterung kompensiert. Der symmetrische Bestandteil von \underline{L} ist dagegen durch den Entspannungsprozess mehr oder weniger stark relaxiert. Man berechnet die verbleibende Spannung als diejenige Spannung, die notwendig ist, um den freien Zustand eines Volumenelements $\underline{\beta}^{(fr)}$ in den wirklichen Zustand $\underline{\beta}^0$ überzuführen. Demnach berechnet sich die gesamte innere Spannung mit Gl.(8.17), (8.23), (8.32) und (8.35) zu:

$$\begin{aligned}\sigma_{ik}^{(ms)} &= L_{ik}^\omega - \bar{L}_{ik}^\omega + c_{iklm} [\beta_{lm}^0 - \epsilon_{lm}^{(fr)}] \\ &= (L_{ik} - \bar{L}_{ik}) - c_{ikrs} n_r n_l \Gamma_{sm}^{-1} (L_{lm} - \bar{L}_{lm})\end{aligned}\quad (8.36)$$

Folgende Eigenschaften von $\underline{\sigma}^{(ms)}$ lassen sich leicht bestätigen:

1) Nur bei einer inhomogenen Magnetisierung entstehen magnetostriktive Spannungen. Wenn überall der Tensor \underline{L} gleich seinem Mittelwert $\bar{\underline{L}}$ ist, verschwinden die Spannungen. Auch verschwindet der Mittelwert der Spannungen selbst, wie es der Satz von Albenga [8.6] fordert. Daraus folgt, daß in den beiden Domänen die magnetostriktiven Spannungen entgegengesetzt gleich sind.

2) Der Tensor $\underline{\sigma}^{(ms)}$ erfüllt die Gleichgewichtsbedingung $\text{Div } \sigma^{(ms)} = 0$, das heißt, die Normalkomponenten von $\underline{\sigma}^{(ms)}$ verschwinden:

$$n_i \sigma_{ik}^{(ms)} = n_i (L_{ik} - \bar{L}_{ik}) - \sigma_{ks} n_l \Gamma_{sm}^{-1} (L_{lm} - \bar{L}_{lm}) = 0 \quad (8.37)$$

Diese Beziehung würde nicht für den symmetrischen Anteil der magnetostriktiven Spannungen allein gelten. Den Normalkomponenten der Momente \underline{L}^ω wird durch gewisse Anteile der gewöhnlichen elastischen Spannungen die Waage gehalten. Ein Ferromagnetikum kann also auch elastische Spannungen enthalten, wenn seine Magnetostriktion λ und damit \underline{L}^ϵ verschwinden.

3) Wenn wir untersuchen, unter welchen Bedingungen die magnetischen Spannungen identisch verschwinden, so gelangen wir zu zwei Forderungen. Die erste ist, daß die inhomogenen Anteile der Momente

$\underline{L}^\omega - \bar{\underline{L}}^\omega$ verschwinden müssen, da diese durch keinen Entspannungsprozeß kompensiert werden können. (Wohl können einzelne Komponenten dieser Spannungen kompensiert werden, wie wir am Beispiel der Normalkomponenten gesehen haben). Die zweite Forderung ist, daß sich die freie Verzerrung als Vielfaches des Normalenvektors in folgender Form (mit einem beliebigen Vektor $\underline{k}(x)$) schreiben läßt:

$$\beta_{ik}^{(fr)} - \bar{\beta}_{ik} = \frac{1}{2} [n_i k_k(x) + n_k k_i(x)] \quad (8.38)$$

In diesem Fall gilt nämlich:

$$L_{lm} - \bar{L}_{lm} = c_{lmik} n_i k_k \quad (8.39)$$

und damit:

$$\sigma_{ik}^{(ms)} = c_{ikrs} n_r k_s - c_{ikrs} \Gamma_{sm}^{-1} \Gamma_{mv} n_r k_v = 0 \quad (8.40)$$

Die Bedingung (8.39) besagt, daß alle Tangentialkomponenten der freien Verzerrung konstant sein müssen, daß also für zwei beliebige Tangentialvektoren $\underline{t}^{(1)}$ und $\underline{t}^{(2)}$ der Ausdruck $[\beta_{ik}^{(fr)} - \bar{\beta}_{ik}] t_i^{(1)} t_k^{(2)}$ verschwindet. Diese Bedingung ist in der Kristallographie als Bedingung für die Spannungsfreiheit einer Zwillingsgrenze wohlbekannt. Die unter Punkt drei genannten Bedingung für das Verschwinden der Spannungen gelten insbesondere auch für das Verhalten im Unendlichen. Eine Blochwand, die zwei Domänen trennt, besitzt also genau dann keine bis ins unendliche reichenden Spannungen, wenn sich einerseits die Momente \underline{L}^ω in den Domänen nicht unterscheiden, und andererseits die freien Verzerrungen in den Domänen in den Tangentialkomponenten gleich sind.

8.7 Die magnetostriktive Wechselwirkung von magnetischen Strukturen mit Versetzungen

Die magnetostriktive Spannung $\underline{\sigma}^{(ms)}$ hat eine große Bedeutung für die Beschreibung der Wechselwirkung zwischen magnetischen Strukturen und Gitterfehlern, insbesondere Versetzungen. Nach der Formel von Peach und Köhler [8.6, 8.7] übt eine beliebige, auch unsymmetrische Spannung auf einen Versetzungsabschnitt eine Kraft

$$d\underline{K} = d\underline{L} \times (\underline{\sigma} \cdot \underline{b}) \quad (8.41)$$

aus, wobei $d\underline{L}$ der Linienvektor der Versetzung und \underline{b} ihr Burgersvektor

sei. Umgekehrt ist $-dK$ die Kraft, die ein Abschnitt einer Versetzung auf das Volumenelement einer Magnetisierungsstruktur ausübt. Durch Integration über die Länge der Versetzung läßt sich aus (8.41) also zum Beispiel die Kraft berechnen, die eine Versetzung auf eine Blochwand ausübt. Für \underline{g} wird man dabei zunächst $\underline{g}^{(ms)}$ nach Gl.(8.36) einsetzen. Dies setzt allerdings voraus, daß die magnetostriktiven Spannungen der Blochwand von der Versetzung nur unwesentlich beeinflußt werden. Diese Annahme ist in einachsigen Kristallen in der Regel gerechtfertigt, ist jedoch in kubischen Kristallen insbesondere für jene Wände problematisch, deren Wandweite wesentlich durch die magnetostriktive Eigenenergie bestimmt wird. Pfeffer [8.8] berechnete die Struktur einer Blochwand in Nickel in der Nähe einer parallel laufenden Versetzung; er fand eine starke Beeinflussung der Wechselwirkung zwischen Blochwand und Versetzung durch die Veränderung der Wandstruktur in der Nähe der Versetzung. Eine entsprechende Rechnung für durch die Wand durchstoßende Versetzungen liegt noch nicht vor.

Das qualitative Verhalten der Wechselwirkung zwischen Blochwand und Versetzung wird jedoch sicherlich durch (8.36) und (8.41) wiedergegeben. Eine umfangreiche Literatur [8.9-8.12] beschäftigt sich mit den daraus zu ziehenden Folgerungen für verschiedene Gitter- und Versetzungstypen.

8.8 Die Einbeziehung der magnetostriktiven Eigenenergie in die Berechnung von Wandstrukturen

Wir wollen schließlich noch untersuchen, in welcher Weise die allgemeine Formel (8.34) für die magnetostriktive Eigenenergie in die Berechnung einer Blochwand einbezogen werden kann. Dabei wird sich eine weitgehende Analogie zur in Abschn.6.2 behandelten Streufeldenergie einer Blochwand zeigen.

Da (8.34) nicht von den Ortsableitungen der Magnetisierung abhängt, läßt sich diese Energie unmittelbar der verallgemeinerten Kristallenergie $G(\theta_1)$ zuschlagen und in die allgemeine Theorie eingliedern.

Ähnlich wie in Abschn.6.2 sind jedoch auch hier die Randwerte gemeinsam zu berechnen, wenn die Feldgröße in den Domänen nicht verschwindet. Wir definieren die Funktion $G_o(\theta_i)$ durch:

$$G = G_o(\theta_i) + e_{ms}(\theta_i) \quad (8.42)$$

und verwenden eine ähnliche Notation, wie sie in Gl.(6.6) definiert wurde. Dann schreiben sich die Gleichgewichtsbedingungen für die Variablen in den beiden Domänen in folgender Form:

$$\delta[G_o^{(a)} + G_o^{(e)}] = \delta[G_o^{(a)} + G_o^{(e)} + \frac{1}{4}(L_{ik}^{(a)} - L_{ik}^{(e)})(L_{lm}^{(e)} - L_{lm}^{(a)})\tilde{s}_{iklm}] = 0 \quad (8.43)$$

Die Variation nach θ^a ergibt:

$$G_o^{(a)} + \frac{1}{2}L_{ik}^{(a)}(L_{lm}^{(a)} - L_{lm}^{(e)})\tilde{s}_{iklm} = 0 \quad (8.44)$$

Die Variation nach $\theta^{(e)}$ liefert einen zweiten, Gl.(8.44) entsprechenden Satz von Gleichungen, der sich aus Gl.(8.44) durch die Vertauschung der Indices (a) und (e) ergibt.

Treten keine weitreichenden Spannungen in den Domänen auf, so ergibt eine einfache Rechnung, daß die magnetoelastischen Beiträge zur Randwertgleichung (8.44) verschwinden. Die Bedingungen, unter denen keine weitreichenden Spannungen auftreten, wurden in Abschnitt 8.6 erläutert. Treten dagegen weitreichende Spannungen bei einer Wand auf, so sind im allgemeinen die Randwerte der Wand unter Einschluß der Magnetostriktion zu berechnen.

Wie im Fall der Streufeldkopplung zeigt sich auch hier, daß die Funktion $G(\theta_i)$ in den Randpunkten unter dem Einfluß der magnetostriktiven Kopplung stationär bleibt und somit der Charakter der Wände im Unendlichen unberührt bleibt.

Die Gleichungen (8.34), (8.36) und (8.44) sind leicht mit Rechenmaschinen auszuwerten. Die komplizierteren Tensoren \underline{I} und \tilde{s} brauchen für einen Kristall und eine Wandnormale nur je einmal berechnet zu werden. Damit kann eine Vielzahl von Wänden (für unterschiedliche

äußere Felder bzw. äußere Spannungen sowie für verschiedene Werte der magnetischen und magnetostriktiven Konstanten) berechnet werden. Insofern ist die Form (8.34) für die magnetostriktive Eigenenergie sehr zweckmäßig. Aber auch analytische Rechnungen können von Gl. (8.34) ausgehend leicht durchgeführt werden, wie in den nächsten Abschnitten gezeigt wird.

-
- [8.1] A.E. Love, The Mathematical Theory of Elasticity, (Dover, New York, 1944)
 - [8.2] R. Becker, W. Döring, Ferromagnetismus, (Springer, Berlin 1939)
 - [8.3] W.P. Mason, Phys.Rev. 82, 715 (1951)
 - [8.4] M.I. Kaganov, V.M. Tsukernik, JETP 9, 224 (59)
 - [8.5] G. Rieder, Abhandl. Braunsch. Wiss. Ges. 11, 20 (1959)
 - [8.6] E. Kröner, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1958)
 - [8.7] M. Peach, I.S. Koehler, Phys.Rev. 80, 436 (1950)
 - [8.8] K.-H. Pfeffer, phys.stat.sol. 19, 735, 20, 395 (1967)
 - [8.9] F. Vicena, Czech.J.Phys. 5, 480 (1955)
 - [8.10] G. Rieder, Z.angew.Phys. 9, 187 (1957)
 - [8.11] A. Seeger, H. Kronmüller, H. Rieger, H. Träuble, J.Appl. Phys. 35, 740 (1964)
 - [8.12] H. Träuble, in Moderne Probleme der Metallph. (Hrsg.A.Seeger) (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1966) Bd.2
 - [8.13] H. Träuble, in Magnetism and Metallurgy, Hrsg. A.Berkowitz und E. Kneller (Academic Press, New York, 1968) Bd.2

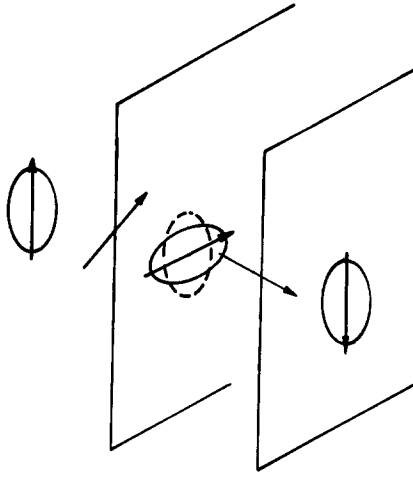


Fig.8.1

Veranschaulichung der Wirkung der magnetostruktiven Eigenstressungen auf eine 180° -Wand. Ausgezogene Ellipsen: Darstellung des freien Verzerrungszustandes der einzelnen Gebiete. Gestrichelt: Tatsächlicher, energetisch höher liegender Verzerrungszustand im Inneren der Blochwand

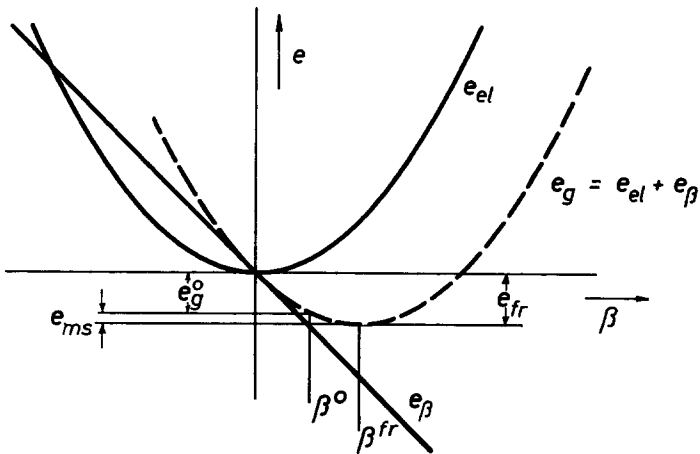


Fig.8.2

Schematische Darstellung der verschiedenen, bei der Berechnung der magnetostruktiven Eigenenergie vorkommenden Energien und Verzerrungen