

2. Berechnung von ebenen S-N-Wänden

2.1 Berechnung im Rahmen der GL-Theorie

a) Allgemeine Beziehungen

Nach den Erläuterungen des letzten Abschnitts trennt eine sog. S-N-Wand einen supraleitenden Bereich mit ($h=0, \psi=1$) von einem normalleitenden Bereich mit ($h=1/\sqrt{2}, \psi=0$). Die geeignete Gibbs'sche Energie zur Berechnung dieses Übergangs ist durch (1.9) gegeben. F verschwindet in beiden Bereichen, sodaß die Wandenergie gerade durch den Überschuß an freier Energie in der Wandzone gegeben ist.

Da das Funktional (1.9) isotrop ist, können wir die Wandnormale parallel zur x-Achse legen. Nur magnetische Felder parallel zur Wand sind erlaubt. Die Feldrichtung sei die y-Achse. Dann können wir das Vektorpotential so wählen, daß es parallel zur z-Achse zeigt und einfach $h=a'$ gilt. Damit erhalten wir folgende Gleichung für die Wandenergie pro Flächeneinheit der Wand:

$$\sigma_{SN} = \frac{H^2 \lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(h-1/\sqrt{2})^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 + \frac{\psi'^2}{\kappa^2} + a^2\psi^2] dx \quad (2.1)$$

ψ kann demnach als reell angenommen werden. Die Randbedingungen lauten

$$h(\infty) = a(\infty) = 0, \quad h(-\infty) = 1/\sqrt{2}, \quad \psi(\infty) = 1, \quad \psi(-\infty) = 0 \quad (2.2)$$

(2.1) ist nun bezüglich der beiden skalaren Funktionen $a(x)$ und $\psi(x)$ unter den Randbedingungen (2.2) zu variieren. Dieses Variationsproblem ist verwandt mit dem Variationsproblem für die Blochwand in ferromagnetischen Stoffen. Der wesentliche Unterschied liegt in der Randbedingung für die Variable $a(x)$, die für $x \rightarrow -\infty$ wie $-x\sqrt{2}$ gegen unendlich gehen muß und für die also kein wohldefinierter Randwert existiert.

Durch die Bildung der Variationsableitungen nach ψ und a gehen aus (2.1) folgende Differentialgleichungen hervor:

$$-\psi(1-\psi^2) - \kappa^{-2}\psi'' + a^2\psi = 0 \quad (2.3)$$

$$-a'' + a\psi^2 = 0 \quad (2.4)$$

Multiplizieren wir (2.3) mit ψ' und (2.4) mit a' , addieren beide Gleichungen und integrieren, so erhalten wir nach Festlegung der Integrationskonstanten durch die Randbedingungen (2.2) folgende Identität:

$$\frac{1}{2}(1-\psi^2)^2 + a^2\psi^2 = \kappa^{-2}\psi'^2 + a'^2 \quad (2.5)$$

Dieses Ergebnis entspricht Gl. (II.3.4) für den Fall von Wänden in ferromagnetischen Materialien.

Multiplizieren wir andererseits (2.3) mit ψ , integrieren und ziehen das Integral von (2.1) ab, so erhalten wir ein vereinfachtes Integral für σ_{SN} :

$$\sigma_{SN} = \frac{H_c^2}{4\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} [(h-1/\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}\psi^4] dx \quad (2.6)$$

Diese Form der Wandenergie ist mit (2.1) nur dann identisch, wenn $h(x)$ und $\psi(x)$ die Differentialgleichungen (2.3) und (2.4) bereits erfüllen. (2.6) kann nicht als Ausgangspunkt für ein Variationsverfahren benutzt werden.

b) Analytische Berechnung in den Grenzfällen $\kappa \ll 1$ und $\kappa \rightarrow \infty$

In zwei Grenzfällen lassen sich die Differentialgleichungen für die Wand explizit lösen [1.1, 1.3]:

1) $\kappa \ll 1$: In diesem Fall ist die Eindringtiefe sehr klein im Vergleich zur Kohärenzlänge, so daß wir für das Magnetfeld einen diskontinuierlichen Übergang ansetzen können. Wir verlangen daher $h=1/\sqrt{2}$, $\psi=0$ für $x<0$ und $a=h=0$ für $x>0$. Die verbleibende Differentialgleichung für ψ im Bereich $x>0$ haben wir bereits mit (1.8) gelöst. Einsetzen in (2.1) oder (2.6) ergibt für die Wandenergie:

$$\sigma_{SN} = \frac{H_c^2}{4\pi} \frac{\sqrt{8}}{3\kappa} \quad (2.7)$$

2) $\kappa \gg 1$: In diesem Fall ist der Term $\kappa^{-2}\psi''$ in (2.3) zu vernachlässigen. Wir verlangen wieder $h=1/\sqrt{2}$, $\psi=0$ für $x<0$ und erhalten für den Bereich $x>0$ aus (2.3) die Beziehung $\psi^2=1-a^2$, die wir in (2.5) einsetzen. Das ergibt für $a(x)$ die Differentialgleichung

$$a'^2 = a^2 - \frac{1}{2}a^4 \quad (2.8)$$

Als Randbedingungen fordern wir $\psi(0)=0$, $\psi(\infty)=1$, $a(0)=-1$, $a(\infty)=0$.

Dann lautet die Lösung von (2.8):

$$a(x) = -\sqrt{2} \cosh(x+c) \text{ mit } \cosh(c) = \sqrt{2} \quad (2.9)$$

Die Wandenergie ergibt sich aus (2.1) zu

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{SN}} &= \frac{H_c^2 \lambda}{4\pi} \left[-\sqrt{2} \int_0^{\infty} \left(a'^2 + a^2 - \frac{1}{2}a^4 \right) dx \right] = \frac{H_c^2 \lambda}{4\pi} \left[-\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a^4} da \right] = \\ &= -\frac{H_c^2 \lambda}{4\pi} \frac{4}{3} (\sqrt{2}-1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Die Wandenergie ist also für große κ negativ, eine Tatsache, die eng mit der Erscheinung der sogenannten Typ-II-Supraleitung verbunden ist, wie noch genauer zu erläutern sein wird.

c) Die Nullstelle der Wandenergie

Da die Wandenergie bei $\kappa=0$ positiv, bei $\kappa \rightarrow \infty$ aber negativ ist, muß es mindestens einen Wert von κ geben, für den σ_{SN} verschwindet. Es läßt sich zeigen, daß eine Nullstelle (und wie man heute weiß, die einzige) bei $\kappa=1/\sqrt{2}$ liegt.

Zum Beweis gehen wir von (2.6) aus und stellen fest, daß die Wandenergie auf jeden Fall dann verschwindet, wenn der Integrand identisch verschwindet, wenn also

$$\psi^2 = 1 - \sqrt{2} h \quad (2.11)$$

mit beiden Differentialgleichungen (2.3) und (2.4) verträglich

ist. Setzen wir zunächst (2.11) in (2.5) ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{\kappa} \psi' = -a\psi \quad (2.12)$$

Wir bilden nun die Ableitung von (2.11), setzen (2.12) ein und erhalten:

$$a'' = \sqrt{2\kappa} a \psi^2 \quad (2.13)$$

Diese Gleichung ist dann mit Gleichung (2.4) verträglich, wenn $\kappa=1/\sqrt{2}$ ist, was zu beweisen war.

d) Numerische Berechnungen der S-N-Wand für beliebige κ .

Es ist nicht möglich, die Wandenergie für beliebige Werte von κ analytisch zu berechnen. Numerische Berechnungen können ähnlich, wie in Abschn. II.3.4b erläutert, mit Hilfe eines Differenzenverfahrens gewonnen werden. Man wählt dabei zweckmäßigerweise ψ und h als Variable, da für diese wohldefinierte Randwerte existieren. Da in den Differentialgleichungen aber $a = \int h \, dx$ vorkommt, nimmt die in II.3.4b erläuterte Wechselwirkungsmatrix F_{nm} eine Dreiecksgestalt anstelle einer Bandform an. Das zugehörige Gleichungssystem läßt sich jedoch ebenso leicht wie im Fall einer Bandmatrix mit Hilfe eines Gaußschen Algorithmus auflösen. Lediglich der Speicherbedarf in der Rechenmaschine ist zwangsläufig größer.

Die Ergebnisse numerischer Rechnungen sind in Fig. 2.1 und in Tabelle 2.1 zusammengefaßt. Zunächst ist die Wandenergie als Funktion von κ dargestellt, wie sie schon von Ginzburg [2.1] berechnet wurde. Die Wandenergie geht stetig in die zuvor berechneten Grenzwerte für $\kappa \rightarrow \infty$ über. In der Umgebung von $\kappa=0$ läßt sich die Wandenergie näherungsweise durch $4\pi\sigma_{SN}/(H_C^2\xi) = \sqrt{8}/3 - 1.0283\sqrt{\kappa}$ darstellen. Die Funktion $\kappa \cdot \sigma_{SN}(\kappa)$ besitzt also bei $\kappa=0$ eine unendliche Steigung so daß die Lösung bei $\kappa=0$ keinen sehr großen Geltungsbereich besitzt. Auch im anderen Grenzfall $\kappa \rightarrow \infty$ besteht für den interessierenden Bereich von κ -Werten noch eine große Differenz zwischen $\sigma_{SN}(\kappa)$ und der Asymptoten.

Zur Charakterisierung der Wandweite verfahren wir ähnlich wie im Fall der magnetischen Wände (Abschn. II.2.2). Dazu werden an die Kurven $\psi(x)$ und $h(x)$ Tangenten in den Punkten extremer Steigung, also in den Wendepunkten, angelegt und die Schnittpunkte mit den Grenzgeraden für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ bestimmt (s. Fig. 2.2). Aus der Differenz der Schnittpunkte ergeben sich für $\psi(x)$ und $h(x)$ die Wandweiten W_ψ bzw. W_h . Als weitere charakteristische Größe wird der Abstand der Wendepunkte der beiden Kurven $\psi(x)$ und $h(x)$ bestimmt, der mit $L_{h\psi}$ bezeichnet wird. Diese Wandweitenparameter sind ebenfalls in Tabelle 2.1 und in Fig. 2.1 als Funktion von κ dargestellt.

Generell sind die Wandweiten größer als die jeweiligen charakteristischen Längen ξ und λ . Für kleine κ nähert sich W_ψ dem Wert ξ , gleichzeitig wird jedoch W_h sehr groß gegen λ . $h(x)$ wird also in diesem Bereich wesentlich durch die Funktion $\psi(x)$ bestimmt und nicht durch das Eigenverhalten des Magnetfelds bei konstantem ψ , wie es in der Eindringtiefe λ zum Ausdruck kommt. Bei großen κ nähert sich umgekehrt W_h dem Wert λ , während W_ψ sehr viel größer als ξ wird. Im Übergangsbereich $\kappa \approx 1$ sind schließlich sowohl W_ψ als auch W_h um den Faktor 2-3 größer als ξ und λ . Die weit verbreitete anschauliche Vorstellung zur Form einer S-N-Wand, nach der die Wellenfunktion $\psi(x)$ in der Wand mit der charakteristischen Länge ξ ansteigt, während das Magnetfeld $h(x)$ mit der Eindringtiefe λ abfällt, ist also nicht brauchbar. Es ist bemerkenswert, daß offensichtlich weder W_ψ noch W_h für $\kappa \rightarrow 0$ gegen die Wandweiten der Lösung bei $\kappa=0$ ($W_h=0$, $W_\psi=\xi/\sqrt{2}$) konvergieren. Das unterstreicht den singularen Charakter der Lösung bei $\kappa=0$.

Fig. 2.3 zeigt den genauen Verlauf der Funktionen $\psi(x)$ und $h(x)$ für eine Reihe von κ -Werten.

Im nächsten Abschnitt wollen wir untersuchen, in welchem Maße Struktur und Energie der S-N-Wand bei tieferen Temperaturen von dem durch die GL-Gleichungen beschriebenen Verhalten bei $T=T_c$ abweichen. Wir benutzen dazu das in Abschn. 1.2 eingeführte Funktional von Neumann und Tewordt, das die Korrekturen erster Ordnung in $\mathfrak{S}=1-T/T_c$ zu berechnen gestattet.

2.2 Berechnung von SN-Wänden mit Hilfe des Funktionals von Neumann und Tewordt

a) Allgemeine Beziehungen

Unter den gleichen geometrischen Bedingungen wie in 2.1 vereinfachen sich die Zusatzterme (1.12a) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 P_c &= \psi^2(1-\psi^2)^2, \\
 P_k &= -(1-\psi^2)(\kappa_3^{-2}\psi'^2 + a^2\psi^2) \\
 P_w &= \kappa_3^{-2}\psi^2\psi'^2 \\
 P_{4c} &= \kappa_3^{-2}(4a^2\psi\psi'' + (2a\psi' + a'\psi)^2) \cong \kappa_3^{-2}(a'^2\psi^2 - 4aa'\psi\psi') \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Den Term P_{4c} eliminieren wir - wie erläutert - mit Hilfe der Transformation (1.16). Die zweite Form für P_{4c} geht aus der ersten durch eine partielle Integration hervor. Die zugehörigen Differentialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
 &-\psi(1-\psi^2) - (1-\vartheta\tilde{\eta}_k)(\kappa_3^{-2}\psi'' - a^2\psi) + \vartheta\tilde{\eta}_c\psi(1-\psi^2)(1-3\psi^2) \\
 &+ 2\vartheta\tilde{\eta}_k a^2\psi^3 - \vartheta(\tilde{\eta}_w + \tilde{\eta}_k)\kappa_3^{-2}\psi(\psi'^2 + \psi\psi'') \\
 &+ \vartheta\eta_{4c}\kappa_3^{-2}(3a'^2\psi + 2aa'\psi) = 0 \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

$$-a'' + a\psi^2 - \vartheta\tilde{\eta}_k a\psi^2(1-\psi^2) + \vartheta\eta_{4c}\kappa_3^{-2}(2a(\psi\psi'' + \psi'^2) - a''\psi^2 - 2a'\psi\psi') = 0 \quad (2.16)$$

An die Stelle der Identität (2.5) tritt für das NT-Funktional:

$$\frac{1}{2}(1-\psi^2)^2 + a^2\psi^2 + \vartheta\tilde{\eta}_c P_c = \kappa_3^{-2}\psi'^2 + a'^2 + \vartheta\tilde{\eta}_k P_k + \vartheta\tilde{\eta}_w P_w + \vartheta\eta_{4c}\kappa_3^{-2}(a'^2\psi^2 - 4aa'\psi\psi') \quad (2.17)$$

Die vereinfachte Formel für die Wandenergie (2.7) geht über in:

$$\sigma_{SN} = \frac{H_c^2 \lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(h - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\psi^4 + \vartheta(2\tilde{\eta}_c\psi^4(1-\psi^2) - \tilde{\eta}_k a^2\psi^4 - \kappa_3^{-2}(\tilde{\eta}_k + \tilde{\eta}_w)\psi^2\psi'^2) \right] dx \quad (2.18)$$

b) Analytische Berechnung in den beiden Grenzfällen $\kappa \ll 1$ und $\kappa \rightarrow \infty$. Die beiden Grenzfälle $\kappa \ll 1$ und $\kappa \gg 1$ lassen sich für das NT-Funktional ebenso wie für das GL-Funktional analytisch exakt behandeln. Die Rechnungen führen zu Lösungen in Form von elliptischen Integralen, die für kleine \mathfrak{A} in elementarer Weise entwickelt werden können. (Ähnliche Rechnungen finden sich bereits in [2.2])

1) $\kappa \ll 1$: Wir setzen wieder $a=a'=0$ für $x>0$ und erhalten aus (2.17) die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2}(1-\psi^2)^2 + \mathfrak{A} \tilde{\eta}_c \psi^2 (1-\psi^2)^2 = \kappa_3^{-2} \psi'^2 - \mathfrak{A} \tilde{\eta}_k (1-\psi^2) \kappa_3^{-2} \psi'^2 + \mathfrak{A} \tilde{\eta}_w \kappa_3^{-2} \psi^2 \psi'^2 \quad (2.19)$$

Diese Gleichung entspricht der allgemeinen Blochwandgleichung (II.3.4) und ist, da nur eine Variable $\psi(x)$ eingeht, ebenso wie diese zu lösen. Wir erhalten demnach unter Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\kappa_3} \int_0^\psi \frac{1}{1-\psi^2} \left[\frac{1 - \mathfrak{A}(\tilde{\eta}_k - (\tilde{\eta}_k + \tilde{\eta}_w)\psi^2)}{1 - 2\mathfrak{A}\tilde{\eta}_c\psi^2} \right]^{1/2} d\psi \quad (2.20)$$

$$\sigma_{SN} = \frac{H_c^2 \lambda}{4\pi} \frac{\sqrt{2}}{\kappa_3} \int_0^1 (1-\psi^2) \cdot [(1 + 2\mathfrak{A}\tilde{\eta}_c\psi^2)(1 - \mathfrak{A}(\tilde{\eta}_k - (\tilde{\eta}_k + \tilde{\eta}_w)\psi^2))]^{1/2} d\psi \quad (2.21)$$

Für kleine \mathfrak{A} ist es sinnvoll, die Wurzelausdrücke in (2.20) und (2.21) bis zu linearen Gliedern in \mathfrak{A} zu entwickeln. Um eine explizite Form $\psi(x)$ zu erhalten, führt man dabei zweckmäßigerweise zunächst die Lösung erster Ordnung $\psi_0(x) = \tanh(x/\sqrt{2}\kappa)$, die für $\mathfrak{A}=0$ gültig ist, in alle zu \mathfrak{A} proportionalen Terme in (2.19) ein. Trennt man dann die Variablen und integriert, dann ergibt sich:

$$\psi(x) \cong \tanh\{\sqrt{2}\kappa_3 x [1 + \mathfrak{A}(2\tilde{\eta}_c - \tilde{\eta}_w)] - (2\tilde{\eta}_c - \tilde{\eta}_k - \tilde{\eta}_w) \tanh(\sqrt{2}\kappa_3 x)\} \quad (2.22)$$

Für die Wandenergie schließlich folgt aus (2.21) unmittelbar:

$$\sigma_{SN} = \frac{H_c^2 \lambda}{4\pi} \frac{\sqrt{2}}{\kappa_3} \left[\frac{2}{3} + \frac{\mathfrak{A}}{15} (2\tilde{\eta}_c - 4\tilde{\eta}_k + \tilde{\eta}_w) \right] \quad (2.23)$$

2) $\kappa \gg 1$

In diesem Fall gehen wir von (2.15) aus und vernachlässigen zunächst alle κ^{-2} enthaltenden Terme. Daraus folgt:

$$a^2 = (1-\psi^2) \frac{1-\mathfrak{A}\tilde{\eta}_c(1-3\psi^2)}{1-\mathfrak{A}\tilde{\eta}_k(1-2\psi^2)} \quad (2.24)$$

Mit diesem Ausdruck eliminieren wir ψ^2 aus Gl. (2.17) und erhalten wiederum eine separierbare Differentialgleichung vom gleichen Typ wie (2.19), diesmal jedoch für $a(x)$, welche für kleine \mathfrak{A} in folgende Beziehung übergeht:

$$a'^2 = a^2 - \frac{1}{2} a^4 + \mathfrak{A}(\tilde{\eta}_c - \tilde{\eta}_k) a^4 (1-a^2) \quad (2.25)$$

Setzen wir in den letzten, zu \mathfrak{A} proportionalen Term die Lösung 1. Ordnung $a(x) = -1/\cosh(x+c)$ ein, so erhalten wir:

$$a(x) = -1/\cosh(\xi(x)), \quad \xi(x) = x+c + \mathfrak{A}(\tilde{\eta}_c - \tilde{\eta}_k) [2\tanh(x+c) - \arctan(\sinh(2(x+c)))] \quad (2.26)$$

wobei c wiederum so zu bestimmen ist, daß $a(0) = -1$ gilt.

Für die Wandenergie ergibt sich analog zu (2.10):

$$\sigma_{SN} = \frac{H_c^2 \lambda}{4\pi} \left[-\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1) - \frac{2}{5}\mathfrak{A}(\tilde{\eta}_c - \tilde{\eta}_k)(3\sqrt{2}-4) \right] \quad (2.27)$$

Die analytische Berechnung der Nullstellen der Wandenergie scheint für das NT-Funktional nicht möglich zu sein. Der Beweis, der im Fall des GL-Funktional zum Erfolg führte, ist nicht übertragbar. Ein Grund hierfür ist, daß - wie numerische Rechnungen zeigen - der Integrand von Gl. (2.18) für das NT-Funktional bei $\sigma_{SN} = 0$ nicht verschwindet. Im GL-Fall verschwand der entsprechende Integrand in (2.6) (und nicht nur das Integral), was den Ansatzpunkt für die Berechnung der Nullstelle von $\sigma_{SN}(\kappa)$ lieferte.

c) Numerische Berechnungen für beliebige κ und kleine \mathfrak{A} .

Die numerische Behandlung von S-N-Wänden mit Hilfe des NT-Funktionalis ist nicht wesentlich schwieriger als im Fall der GL-Theorie, da in den Differentialgleichungen (2.15) und (2.16) ebenso wie in den Gleichungen (2.3) und (2.4) nur höchstens zweite Ableitungen der Variablen $a(x)$ und $\psi(x)$ auftreten. Mit Hilfe solcher Rechnungen lassen sich im Prinzip die Wandenergie, Wandweiten und Wandprofile als Funktion der drei Parameter κ, α und \mathfrak{A} berechnen. Wenn man sich allerdings nur für die Wandenergie im Bereich kleiner \mathfrak{A} interessiert, dann ist es nicht einmal nötig, die erweiterten Gleichungen (2.15) und (2.16) explizit zu lösen. Wie Jacobs [2.3] gezeigt hat, genügt die Kenntnis der GL-Lösung für ein gegebenes κ , um die Wandenergie bis zur ersten Ordnung in \mathfrak{A} zu berechnen.

Zum Beweis dieses Satzes entwickeln wir die gesuchte Lösung $\psi(x)$ und $a(x)$ als Funktion von \mathfrak{A} :

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \mathfrak{A}\psi_1(x), \quad a(x) = a_0(x) + \mathfrak{A}a_1(x) \quad (2.28)$$

wobei $\psi_0(x)$ und $a_0(x)$ die GL-Gleichungen (2.3) und (2.4) erfüllen sollen. Die Entwicklungen (2.28) setzen wir in die Wandenergie (2.1) und die Zusatzterme (2.14) ein und berücksichtigen dabei alle Terme bis zu erster Ordnung in \mathfrak{A} . Dabei ist auch die Temperaturabhängigkeit von κ_3 (1.15) zu beachten. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_{SN} &= \frac{H_c^2 \lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [p_0(\psi_0, a_0) + 2\mathfrak{A}p_1(\psi_0, \psi_1, a_0, a_1) + \mathfrak{A}^2 p_2(\psi_0, a_0)] dx, \\ p_0 &= (h_0 - 1/\sqrt{2})^2 - \psi_0'^2 + \frac{1}{2}\psi_0^4 + \kappa^{-2}\psi_0'^2 + a_0^2\psi_0^2 \\ p_1 &= h_1(h_0 - 1/\sqrt{2}) - \psi_0\psi_1 + \psi_0^3\psi_1 + \kappa^{-2}\psi_0'\psi_1' + a_0 a_1 \psi_0^2 + a_0^2 \psi_0 \psi_1, \\ p_2 &= -2\kappa^{-2}\psi_0\psi_0'^2 + \tilde{n}_c \psi_0^2 (1 - \psi_0^2)^2 - \tilde{n}_k (1 - \psi_0^2) (\kappa^{-2}\psi_0'^2 + a_0^2\psi_0^2) \\ &\quad + \tilde{n}_w \kappa^{-2}\psi_0^2\psi_0'^2 + \eta_{4c} \kappa^{-2} (a_0^2\psi_0^2 - 4\psi_0\psi_0' a_0 a_0') \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ähnlich wie im Fall der Blochwand (Abschn. II.3.3b) lassen sich auch hier alle Terme, die die Korrekturfunktionen ψ_1 und a_1

enthalten, zu einem vollständigen Differential zusammenfassen:

$$p_1 = \frac{d}{dx} [a(a'-1/\sqrt{2}) + \kappa^{-2} \psi'_0 \psi_1] \quad (2.30)$$

sodaß wegen der Randbedingungen (2.2) das Integral über p_1 verschwindet. In dieser Näherung ergibt sich demnach die Temperaturabhängigkeit der Wandenergie allein aus dem Integral über $p_2(\psi_0, a_0)$, also aus der GL-Lösung. Tab. 2.2 zeigt die dabei auftretenden Integrale als Funktion von κ , mit deren Hilfe $d\sigma_{SN}/d\mathfrak{S}$ an der Stelle $\mathfrak{S}=0$ für alle Werte des Verunreinigungsparameters α berechnet werden kann:

$$\frac{d\sigma_{SN}}{d\mathfrak{S}} = \frac{H^2 \lambda}{4\pi} \mathfrak{S} (\tilde{n}_c E_3 - (2\phi + \tilde{n}_k) E_1 + (\tilde{n}_k + \tilde{n}_w) E_4 - \tilde{n}_k E_5 + n_{4c} E_6) \quad (2.31)$$

wobei die Funktionen $E_i(\kappa)$ in Tabelle 2.2 definiert sind. Für die Werte von α ist diese Größe in Tabelle 2.1 angegeben. Auch die Verschiebung der Nullstelle von σ_{SN} läßt sich in erster Ordnung in \mathfrak{S} mit diesem Verfahren berechnen [2.3]. Wir entwickeln dazu σ_{SN} in der Umgebung des Punktes ($\kappa=1/\sqrt{2}$, $\mathfrak{S}=0$) bis zu linearer Ordnung in \mathfrak{S} und $\kappa-1/\sqrt{2}$:

$$\sigma_{SN} = \sigma_{\kappa}^0 (\kappa-1/\sqrt{2}) + \sigma_{\mathfrak{S}}^0 \cdot \mathfrak{S} \quad (2.32)$$

mit $\sigma_{\kappa}^0 = \left. \frac{d\sigma}{d\kappa} \right|_{\kappa=1/\sqrt{2}, \mathfrak{S}=0}$ und $\sigma_{\mathfrak{S}}^0 = \left. \frac{d\sigma}{d\mathfrak{S}} \right|_{\kappa=1/\sqrt{2}, \mathfrak{S}=0}$.

Daraus ergibt sich der kritische Wert für das Verschwinden der Wandenergie zu

$$\kappa_{SN} = 1/\sqrt{2} - \mathfrak{S} \sigma_{\mathfrak{S}}^0 / \sigma_{\kappa}^0 \quad (2.32)$$

Die Werte für $\sigma_{\mathfrak{S}}^0$ sind durch (2.32) gegeben und in Tabelle 2.1 bei $\kappa=1/\sqrt{2}$ angegeben. σ_{κ}^0 berechnet sich auf ähnlichem Wege zu

$$\sigma_{\kappa}^0 = -2\sqrt{2} E_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1.0965 .$$

Mit dem Verfahren von Jacobs ist es nicht möglich, etwas über die Temperaturabhängigkeit der Wandweiten oder der Wandprofile selbst

zu erfahren, da man dazu die Korrekturfunktionen ψ_1 und a_1 (2.28) benötigt. In Tab. 2.1 sind Werte für die Ableitungen der Wandweiten nach der Temperatur angegeben, die aus numerischen Rechnungen durch Extrapolation von endlichen δ auf $\delta=0$ gewonnen wurden.

2.3 Anisotropie der Wandenergie

a) Hexagonale Kristalle

In Abschn. 1.3 haben wir diejenigen Beiträge zur freien Energie angeführt, die zu einer Anisotropie in Supraleitern führen können. Da eine theoretische Ableitung der zugehörigen Koeffizienten noch nicht zu endgültigen Ergebnissen geführt hat, wollen wir uns hier darauf beschränken, die jeweils einfachsten anisotropen Terme in phänomenologischer Weise zum isotropen Potential hinzuzunehmen und den Einfluß dieses Zusatzterms auf die Wandenergie zu berechnen. In einem hexagonalen Kristall legen wir dazu ein orthogonales Koordinatensystem derart in den Kristall, daß die z_3 -Achse mit der c-Achse des Kristalls zusammenfällt. Dann läßt sich nach 1.3 der anisotrope Beitrag zur freien Enthalpie in der Form $\eta_u P_u$ mit

$$P_u = [|O_3\psi|^2 - \frac{1}{2}(|O_1\psi|^2 + |O_2\psi|^2)] \quad (2.33)$$

darstellen. Dabei haben wir P_u derart gewählt, daß für den Fall, daß $\underline{O}\psi$ ein gewöhnlicher Vektor ist, der Mittelwert von P_u über alle Raumrichtungen verschwindet.

Die Richtung der Wand werde durch den Einheitsvektor \underline{n} gekennzeichnet, während das Vektorpotential in die Richtung \underline{t} senkrecht zu \underline{n} zeigen möge. Da in einer Wand nur Variationen längs der Richtung der Wandnormalen (x-Richtung) zugelassen sind, läßt sich der Operator \underline{O} (Gl. (1.11)) in diesem Fall in folgender Form schreiben:

$$\underline{O} = \frac{i}{\kappa} \cdot \frac{d}{dx} + \underline{t}a \quad (2.34)$$

Damit berechnet sich der anisotrope Zusatzterm (2.33) zu

$$P_u = \frac{3}{2} \left(\left(n_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{1}{3} \right) \kappa^{-2} \psi'^2 + \left(t_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{1}{3} \right) a^2 \psi^2 \right) \quad (2.35)$$

Die Richtung des Magnetfeldes \underline{m} steht senkrecht auf \underline{n} und \underline{t} . Mit Hilfe der Beziehung $m_{\frac{3}{2}}^2 + n_{\frac{3}{2}}^2 + t_{\frac{3}{2}}^2 = 1$ können wir in (2.35) die Richtung des Vektorpotentials eliminieren.

Wir wollen den Beitrag P_u als kleine Korrektur zur GL-Energie auffassen und können dann - ähnlich wie im letzten Abschnitt - die Korrekturen erster Ordnung zur Wandenergie durch Einsetzen der GL-Lösung in P_u und Integration gewinnen. Dabei treten zwei Integrale auf, die wir mit E_1 und E_2 bezeichnet haben, und die als Funktion von κ in Tab. 2.2 aufgeführt sind. Mit diesen Größen erhalten wir einen geschlossenen Ausdruck für die Orientierungsabhängigkeit der Wandenergie, die nur noch die Magnetfeldrichtung \underline{m} und die Richtung der Wandnormale \underline{n} enthält:

$$\sigma_{SN}(\kappa, \eta_u) = \sigma_{SN}^0(\kappa) + \eta_u \frac{3}{2} \left[-m_{\frac{3}{2}}^2 E_2 + n_{\frac{3}{2}}^2 (E_1 - E_2) - \frac{1}{3} (E_1 - 2E_2) \right] \quad (2.36)$$

b) Kubische Kristalle

Kubische Supraleiter lassen sich mit Hilfe des Zusatzpotentials P_{4a} (Gl. (1.18)) analog zum hexagonalen Fall behandeln. Die genaue Form des isotropen Beitrags P_{is} wollen wir offenlassen und das entsprechende Glied in der Wandenergie durch eine Konstante K_{is} darstellen.

Einsetzen von (2.34) in (1.18) ergibt im kubischen Fall folgendes Ergebnis:

$$P_{4a} = \kappa_{\frac{3}{2}}^{-4} \sum_i n_i^4 \psi'^2 + \sum_i t_i^4 a^4 \psi^2 + \kappa_{\frac{3}{2}}^{-2} \sum_i n_i^2 t_i^2 [(a' \psi + 2a \psi')^2 - 2a^2 \psi \psi'] \quad (2.37)$$

Die zugehörigen Integrale über die GL-Lösungen sind wiederum in Tab. 2.2 unter den Bezeichnungen E_7 , E_8 und E_9 aufgeführt. Rechnen wir die Richtung des Vektorpotentials \underline{t} mit Hilfe der Beziehungen $n_i^2 + t_i^2 + m_i^2 = 1$ in die Richtung des Magnetfeldes \underline{m} um, so erhalten wir für den anisotropen Beitrag zur Wandenergie in kubischen Materialien in niedrigster Näherung:

$$\begin{aligned} \sigma_{SN}(\kappa, \eta_{4a}) = & \sigma_{SN}^0(\kappa) + \vartheta \eta_{4a} [\sum_i n_i^4 (E_7 + E_8 - E_9) \\ & + [m_i^4 \cdot E_7 + \sum_i n_i^2 m_i^2 (2E_7 - E_9) - E_7 + E_9 - K_{is}]] \end{aligned} \quad (2.38)*$$

Die Koeffizienten

$$E_A = E_7 + E_8 - E_9, \quad E_B = 2E_7 - E_9 \quad (2.39)$$

sowie E_7 sind in Fig. 2.4 als Funktion von κ aufgetragen.

E_A charakterisiert die Anisotropie der Wandenergie für den Fall, daß das Magnetfeld in eine [100]-Richtung zeigt. In diesem Fall ist nämlich der Energieunterschied zwischen einer (001)-Wand und einer (011)-Wand gleich $\vartheta \eta_{4a} \cdot \frac{1}{2} \cdot E_A$. Liegt das Feld dagegen in einer [110]-Richtung, dann ergibt sich für den Energieunterschied zwischen einer (110)-Wand und einer (001)-Wand $\vartheta \eta_{4a} \cdot \frac{1}{2} (E_B - E_A)$ und für den Energieunterschied zwischen einer (111)-Wand und einer (001)-Wand $\vartheta \eta_{4a} \cdot \frac{1}{3} (E_B - 2E_A)$. Wenn das Feld in (111)-Richtung liegt, wird im Rahmen dieser Theorie keine Anisotropie der Wandenergie vorausgesagt.

Durch Einsetzen von (2.11) und (2.12) in die Integrale E_7 , E_8 und E_9 läßt sich zeigen, daß die Kombination E_A ebenso wie die Wandenergie selbst bei $\kappa = 1/\sqrt{2}$ verschwindet, was auch aus Fig. 2.4 hervorgeht. Wenn das Magnetfeld in eine [100]-Richtung zeigt, sollte deshalb bei $\kappa = 1/\sqrt{2}$ keine Anisotropie der Wandenergie beobachtet werden.

Es ist zu beachten, daß für die Wandenergie stets das innere Feld in der unmittelbaren Umgebung der Wand maßgeblich ist. Die innere Feldrichtung kann in einem Supraleiter durchaus von der äußeren Feldrichtung abweichen, z.B. in der Nähe der Oberflächen einer Probe oder bei schräg zu den Oberflächen einer Probe orientierten Feldern. Auf Grund solcher Effekte ist es möglich, daß man auf

* Nach einem Hinweis von H. Teichler [2.4] hängt der Koeffizient η_{4a} eng mit η_{4c} zusammen und es ist daher sinnvoll, als isotropen Beitrag in Gl. (1.18) ein Fünftel des Koeffizienten von η_{4c} abzuziehen ($P_{is} = \frac{1}{5}(3P_{43} + P_{4c})$). Damit ergäbe sich die Konstante K_{is} in (2.38) zu

$$K_{is} = \frac{1}{5}(3E_7 + 3E_8 + E_9) \quad (2.38a)$$

einer (111)-Oberfläche selbst dann anisotrope Strukturen beobachtet, wenn das äußere Feld senkrecht zur Oberfläche steht. Dies möge im folgenden noch genauer erläutert werden.

c) Die anisotrope Aufweitung einer Flußröhre

Wir betrachten einen röhrenförmigen normalleitenden Bereich, der sich - wie aus der Theorie bekannt [2.5] - in der Nähe der Oberfläche trichterförmig aufweitet, um die Inhomogenität des Magnetfeldes außerhalb der Probe zu vermindern (Fig. 2.5). Dabei wird in der Nähe der Oberfläche zusätzliche Wandenergie aufgewandt, und wenn die Wandenergie anisotrop ist, dann ist auch eine Anisotropie der Aufweitung zu erwarten. Wir berechnen die Energie einer Wand, die um den Winkel $\bar{\vartheta}$ gegen die Wandnormale geneigt ist. Das Magnetfeld soll parallel zur Wand und in der von Wandnormale und [111]-Achse aufgespannten Ebene liegen. In den Polarkoordinaten $\bar{\vartheta}$ und $\bar{\varphi}$ (Fig. 2.5) schreibt sich dann die Normalenrichtung \underline{n} in der Form

$$\underline{n}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin \bar{\vartheta} + \sqrt{3} \cos \bar{\vartheta} \sin \bar{\varphi} + \cos \bar{\vartheta} \cos \bar{\varphi} \\ \sqrt{2} \sin \bar{\vartheta} + \sqrt{3} \cos \bar{\vartheta} \sin \bar{\varphi} + \cos \bar{\vartheta} \cos \bar{\varphi} \\ \sqrt{2} \sin \bar{\vartheta} - 2 \cdot \cos \bar{\vartheta} \cos \bar{\varphi} \end{pmatrix}$$

Die Magnetfeldrichtung ergibt sich aus $\underline{m}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) = \underline{n}(\bar{\vartheta} - \pi/2, \bar{\varphi})$.

Mit diesem Ansatz berechnen sich die in (2.38) eingehenden Invarianten wie folgt:

$$\sum n_i^4 = \frac{1}{6} (3 + 6 \sin^2 \bar{\vartheta} - 7 \cdot \sin^4 \bar{\vartheta} - 4\sqrt{2} \sin \bar{\vartheta} \cos^3 \bar{\vartheta} \cos 3\bar{\varphi})$$

$$\sum m_i^4 = \frac{1}{6} (3 + 6 \cos^2 \bar{\vartheta} - 7 \cdot \cos^4 \bar{\vartheta} + 4\sqrt{2} \sin^3 \bar{\vartheta} \cos \bar{\vartheta} \cos 3\bar{\varphi})$$

$$\sum n_i^2 m_i^2 = \frac{1}{6} (2 - 7 \cdot \sin^2 \bar{\vartheta} \cdot \cos^2 \bar{\vartheta} + \sqrt{2} \sin 2\bar{\vartheta} \cdot \cos 2\bar{\vartheta} \cdot \cos 3\bar{\varphi})$$

Aus (2.38) ergibt sich demnach eine dreizählige Anisotropie der Wandenergie für $0 < \bar{\vartheta} < 90^\circ$. Eine Flußröhre nach Fig. 2.5, die parallel zu einer [111]-Richtung verläuft, sollte demnach weitab von der Oberfläche, wo $\bar{\vartheta} = 0$ gilt, einen kreisförmigen Querschnitt besitzen.

In der Nähe der Oberfläche jedoch, wo $\mathcal{F} > 0$ wird, erwartet man eine Verzerrung der Querschnittsfläche in Richtung auf eine Dreiecksform. Die Anisotropie wäre in diesem Fall auf der Oberfläche sehr wohl zu beobachten, auch wenn sie im Volumen der Probe keine Rolle spielt.

-
- [2.1] V.L.Ginzburg, Z.Exp.Theor.Fiz. 30, 593 (1956)
Sov.Phys. JETP 3, 621 (1956)
 - [2.2] M. Petersen, Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1971
 - [2.3] A.E. Jacobs, Phys.Rev. B 4, 3016 (1971)
 - [2.4] H. Teichler, private Mitteilung (1972)
 - [2.5] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik (Akademie-Verlag, Berlin, 1967), Bd. 8, Elektrodynamik der Kontinua S. 214 f.

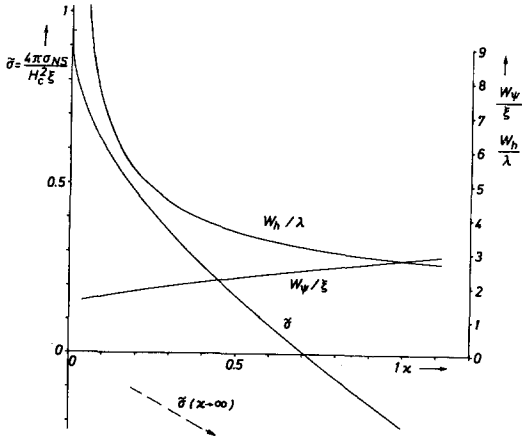


Fig. 2.1
 Wandenergie und Wandweiten der S-N-Wand als Funktion des GL-Parameters.

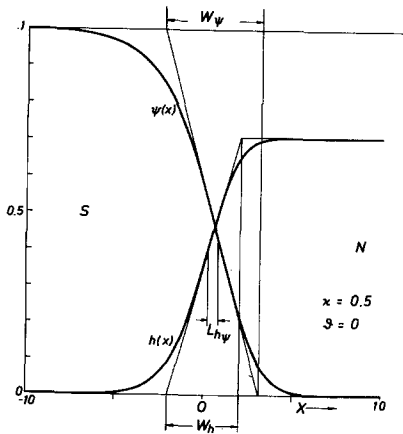


Fig. 2.2
 Zur Definition der Wandweitenparameter W_ψ , W_h und $L_{h\psi}$.

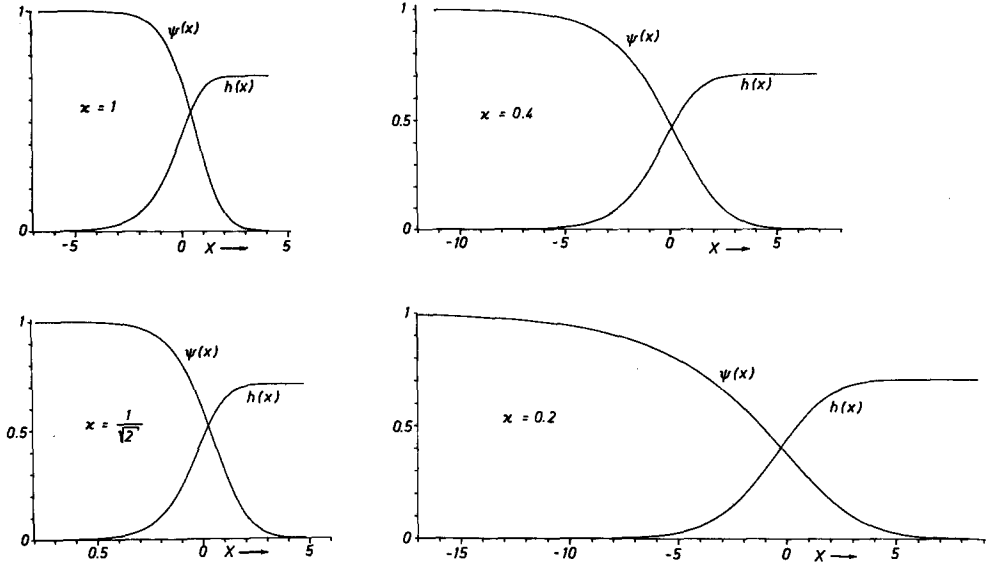


Fig. 2.3

Die Wandprofile einiger S-N-Wände nach der Ginzburg-Landau-Theorie. Längenmaßstab ist die Eindringtiefe.

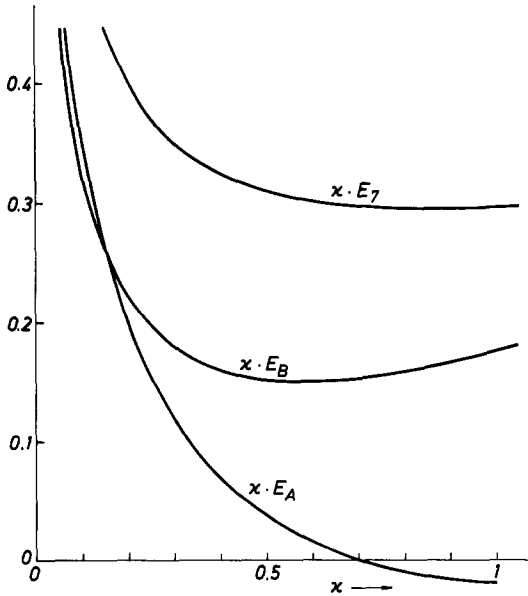


Fig. 2.4

Die Parameter E_A , E_B und E_7 , die nach Gl. (2.39) die Anisotropie der S-N-Wand in kubischen Materialien charakterisieren. Zur Definition der Parameter siehe Gl. (2.39) und Tab. 2.2 .

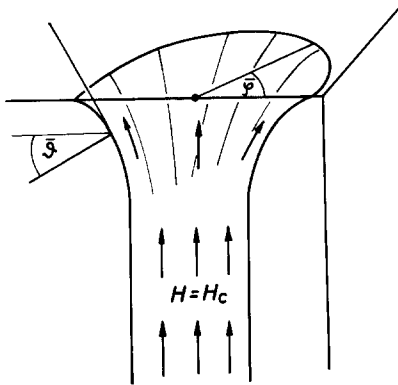


Fig. 2.5

Schematische Darstellung einer in der Nähe einer Probenoberfläche aufgeweiteten Flußröhre in einem Typ-I-Supraleiter.

Tabelle 2.1

Die Ergebnisse numerischer Rechnungen zur S-N-Wand im Rahmen der Ginzburg-Landau-Theorie. $\tilde{\sigma} = 4\pi\sigma_{SN}/(H_c^2\lambda)$. Die Wandweitenparameter W_ψ , W_h und $L_{h\psi}$ sind in Fig. 2.2 definiert. Die Ableitungen der Wandenergie nach der Temperatur bei $T=T_c$ wurden mit Hilfe der in Tab. 2.2 aufgeführten Integrale berechnet, die entsprechenden Größen für die Wandweiten numerisch durch Lösung der Neumann-Tewordt-Gleichungen.

κ	$\tilde{\sigma}$	W_ψ	W_h	$L_{h\psi}$	$d\tilde{\sigma}/d\delta _{\delta=0}$				$dW_\psi/d\delta$	$dW_h/d\delta$	$dL_{h\psi}/d\delta$
					$\alpha=0$	$\alpha=1$	$\alpha=5$	$\alpha=10$			
1	-0.21585	2.792	2.781	0.723	0.0389	-0.0028	-0.0294	-0.0414	-0.275	-0.66	0.63
0.9	-0.16038	2.989	2.882	0.724	0.0265	-0.0147	-0.0409	-0.0530	-0.31	-0.78	0.765
0.8	-0.08840	3.232	3.003	0.723	0.0071	-0.0318	-0.0563	-0.0683	-0.37	-0.91	0.93
0.75	-0.04396	3.376	3.073	0.721	-0.0064	-0.0431	-0.0661	-0.0779	-0.41	-1.01	1.045
$1/\sqrt{2}$	0	3.515	3.140	0.719	-0.0209	-0.0548	-0.0759	-0.0873	-0.45	-1.11	1.145
0.7	0.00787	3.539	3.152	0.719	-0.0236	-0.0570	-0.0777	-0.0891	-0.46	-1.115	1.165
0.65	0.06897	3.726	3.240	0.715	-0.0458	-0.0742	-0.0917	-0.1023	-0.52	-1.24	1.335
0.6	0.14180	3.941	3.341	0.710	-0.0745	-0.0959	-0.1088	-0.1183	-0.60	-1.41	1.53
0.5	0.33808	4.493	3.587	0.692	-0.1635	-0.1600	-0.1567	-0.1618	-0.81	-1.84	2.065
0.4	0.64755	5.305	3.929	0.657	-0.3321	-0.2746	-0.2365	-0.2316	-1.22	-2.55	3.025
0.3	1.19282	6.627	4.440	0.585	-0.6965	-0.5089	-0.3873	-0.3572	-2.05	-3.875	4.96
0.2	2.3555	9.203	5.317	0.421	-1.6905	-1.1120	-0.7412	-0.6334	-4.08	-6.93	9.875
0.15	3.5791	11.729	6.068	0.246	-2.9822	-1.8639	-1.1101	-0.9333	-6.55	-10.49	15.70
0.1	6.1346	16.696	7.343	0.112	-6.3028	-3.7312	-2.0962	-1.5830	-12.10	-18.74	31.78
0.05	14.228	31.312	10.256	-1.138	-20.818	-11.554	-5.6878	-3.7972	-20.43	-47.93	105.6

Tabelle 2.2

Integrale über die Ginzburg-Landau-Lösung der S-N-Wand, welche zur Berechnung von Energiekorrekturen erster Ordnung im Rahmen von Störungsrechnungen dienen können.

κ	$E_1 = \int dx$ $\kappa^{-2} \psi, '2$	$E_2 = \int dx$ $\psi^2 a^2$	$E_3 = \int dx$ $\psi^2 (1 - \psi^2)^2$	$E_4 = \int dx$ $\kappa^{-2} \psi^2 \psi, '2$	$E_5 = \int dx$ $\psi^2 a^2 (1 - \psi^2)$	$E_6 = \int dx$ $\kappa^{-2} [\psi^2 h^2 - 4\psi\psi', ah]$	$E_7 = \int dx$ $\psi^2 a^4$	$E_8 = \int dx$ $\kappa^{-4} \psi, '2$	$E_9 = \int dx$ $\kappa^{-2} [(2\psi', a + \psi h)^2 - 2\psi\psi', a^2]$
1	0.24505	0.35294	0.26837	0.06951	0.23187	0.79938	0.29587	0.10049	0.41547
0.9	0.28230	0.36245	0.28816	0.07979	0.24524	0.96164	0.32725	0.12392	0.46967
0.8	0.32997	0.37413	0.31291	0.09278	0.26128	1.18017	0.36820	0.15857	0.53867
0.75	0.35908	0.38102	0.32776	0.10062	0.27057	1.31924	0.39366	0.18031	0.58071
1/√2	0.38766	0.38763	0.34219	0.10828	0.27936	1.45968	0.41898	0.20244	0.62200
0.7	0.39278	0.38880	0.34475	0.10963	0.28090	1.48516	0.42354	0.20650	0.62937
0.65	0.43214	0.39762	0.36437	0.12007	0.29247	1.68549	0.45901	0.23842	0.68632
0.6	0.47867	0.40773	0.38730	0.13231	0.30553	1.93075	0.50170	0.27793	0.75383
0.5	0.60220	0.43311	0.44709	0.16420	0.33756	2.62308	0.61895	0.39088	0.93484
0.4	0.79275	0.46892	0.53730	0.21225	0.38129	3.79613	0.81049	0.58516	1.22113
0.3	1.12011	0.52361	0.68883	0.29233	0.44570	6.06567	1.16725	0.96420	1.73667
0.2	1.7971	0.61923	0.99498	0.4520	0.55383	11.5934	2.00252	1.890	2.9019
0.15	2.4919	0.70223	1.30365	0.6110	0.64475	18.2248	2.97749	2.993	4.2295
0.1	3.9118	0.84432	1.92484	0.9279	0.79669	34.211	5.2804	5.610	7.3112
0.05	8.2860	1.1717	3.7999	1.8744	1.1375	98.95	14.4109	16.00	19.326