

### 3. Domänenwände in Typ-II-Supraleitern

#### 3.1 Einführung

In Abschnitt 2.1 wurde gezeigt, daß die Wandenergie im Rahmen der Ginzburg-Landau-Theorie bei  $\kappa=1/\sqrt{2}$  verschwindet und für  $\kappa>1/\sqrt{2}$  negativ wird. Geht man von einem gewöhnlichen Domänenzustand aus, so könnte man bei einer solchen negativen Wandenergie insgesamt dadurch Energie gewinnen, daß man die Bereiche immer feiner unterteilt und dadurch zusätzliche Wandfläche schafft. Dies ist sicher so lange möglich, als die Bereiche ausgedehnter als die Wände sind. Seit Abrikosov [3.1] weiß man, daß sich schließlich ein sogenannter Flußlinienzustand einstellt, bei dem der Supraleiter gleichmäßig von "Flußlinien" durchsetzt ist, deren magnetischer Fluß jeweils ein elementares Flußquantum

$\phi_0 = \frac{h \cdot c}{2 \cdot e^*} = H_c \xi \lambda / \sqrt{2}$  beträgt. Die Flußlinien sind in der Regel in Form eines Dreiecksgitters angeordnet, jedoch kommen auch andere Anordnungen vor. Das Auftreten von Flußlinien hat zur Folge, daß auch in makroskopischen Proben Supraleitung und ein inneres magnetisches Feld koexistieren können, was bei den in Abschn. 2 behandelten Typ-I-Supraleitern nur innerhalb einer dünnen Schicht von der Größenordnung der Eindringtiefe  $\lambda$  möglich ist. Zur Unterscheidung von den Typ-I-Supraleitern nennt man Supraleiter, in welche der Fluß auch bei makroskopischen Probendimensionen in Form von Flußlinien eindringt, Typ-II-Supraleiter.

Aus der obigen qualitativen Überlegung läßt sich schließen, daß eine negative S-N-Wandenergie stets Typ-II-Supraleitung zur Folge hat - ein Schluß, der auch nach genaueren Analysen bisher nicht in Frage gestellt werden mußte. Eine Umkehrung dieser Aussage ist zwar im Rahmen der GL-Theorie auch richtig, ist aber im allgemeinen nicht erlaubt. Jacobs [3.2] konnte zeigen, daß z.B. im Rahmen der Theorie von Neumann und Tewordt eine Koexistenz von positiver Wandenergie und Typ-II-Supraleitung durchaus möglich ist. In einem solchen Fall spaltet eine gedachte Typ-I-Domänenanordnung zwar nicht spontan in kleinere Domänen auf (da die Wandenergie positiv ist), aber jeder flußtragende Bereich zerfällt in

elementare Flußlinien, wobei die mittlere Flußdichte der Domäne reduziert wird. Es bildet sich ein neuer Zwischenzustand aus rein supraleitenden Bereichen (sog. Meissner-Bereichen) einerseits, und Flußlinienbereichen andererseits. Diese theoretischen Untersuchungen waren ausgelöst worden durch die experimentelle Beobachtung derartiger Domänenstrukturen von Krägeloh [3.3] und andeutungsweise auch schon von Sarma[3.4] (Bild 3.1).

Wir sind bei der Diskussion des Zwischenzustandes in Typ-II-Supraleitern von einem gedachten Typ-I-Zwischenzustand ausgegangen. Auch das umgekehrte Verfahren, das von einem gewöhnlichen Typ-II-Supraleiter ausgeht, der homogen mit Flußlinien angefüllt ist, führt zu interessanten Einsichten. Voraussetzung für die Ausbildung eines Zwischenzustands ist in diesem Bild offenbar die Existenz einer anziehenden Wechselwirkung zwischen den Flußlinien. Ähnlich wie bei der Kondensation einer Flüssigkeit aus einem Gas läßt sich auch hier die Grenzflächenenergie aus der Wechselwirkungsenergie abschätzen, indem man die den Randelementen der kondensierten Phase fehlenden "Bindungen" aufsummiert.

In einem Typ-II-Supraleiter wird man also auf jeden Fall dann die Möglichkeit eines Zwischenzustands erwarten, wenn die gewöhnliche S-N-Wandenergie positiv ist, darüberhinaus aber auch dann noch, wenn zwar  $\sigma_{SN} < 0$  gilt, die Flußlinien aber eine anziehende Wechselwirkung aufeinander ausüben.

Die vollständige Berechnung einer Wand zwischen Meißner- und Flußlinien-Gebieten dürfte sehr schwierig sein. Nach dem vorhergehenden können wir gewisse Aussagen zur Wandenergie machen, wenn wir z.B. die Wechselwirkungsenergie zwischen den Flußlinien kennen. Diese Größe läßt sich in guter Näherung mit Methoden berechnen, die denjenigen, die bei der gewöhnlichen S-N-Wand zum Erfolg führten, weitgehend entsprechen.

### 3.2 Die Differentialgleichungen und Randbedingungen für rotationssymmetrische Flußlinien

#### a) Die Kreiszellennäherung

Flußlinien sind fadenförmige Strukturen in einem Supraleiter, in deren Kern die Dichte der supraleitenden Elektronen  $|\psi|^2$  verschwindet, während das innere magnetische Feld im Kern der Flußlinie ein Maximum aufweist. Dieses Magnetfeld wird durch ringförmig verlaufende Supraströme erzeugt, die nach außen hin zusammen mit dem Magnetfeld abklingen. Flußlinien wurden zuerst von Abrikosov [3.1] als Lösungen der Ginzburg-Landau-Gleichungen gefunden. Später zeigte sich sowohl experimentell wie theoretisch, daß diese Strukturen nicht nur im Geltungsbereich der Ginzburg-Landau-Theorie bei  $T_c$ , sondern bei allen Temperaturen unterhalb  $T_c$  vorkommen. Insbesondere konnten Flußlinien auch explizit als Lösungen der Gleichungen von Neumann und Tewordt (s. 1.2) berechnet werden [1.12].

Man muß isolierte Flußlinien und Flußlinien innerhalb eines Flußliniengitters unterscheiden. Während bei einer isolierten Flußlinie sowohl die Abweichung der supraleitenden Elektronendichte vom Gleichgewichtswert wie der Suprastrom für große Radien asymptotisch verschwindet, muß im Fall eines Flußliniengitters der Suprastrom aus Symmetriegründen bereits auf den Rändern der Wigner-Seitz-Zellen der einzelnen Flußlinien durch Null gehen. Aus den gleichen Gründen muß auf den Zellengrenzen die Dichte der supraleitenden Elektronen stationär sein. Isolierte Flußlinien kann man in isotropen Supraleitern als rotationssymmetrische Strukturen betrachten. Diese Symmetrie geht in einem Flußliniengitter in der Nähe der polygonalen Zellengrenzen verloren, auch wenn man die Umgebung des Flußlinienkerns weiterhin als rotationssymmetrisch betrachten kann. Eine zuerst von Marcus [3.5] auf das Problem des Flußliniengitters angewandte Näherung besteht nun darin, die wirkliche, polygonale Wigner-Seitz-Zelle durch eine kreisförmige Zelle gleicher Fläche zu ersetzen (Fig. 3.2). Auf der Berandung dieser Zelle soll ebenso wie auf dem Rand der wirklichen Zelle der Suprastrom verschwinden und der Betrag der Wellenfunktion  $\psi$  stationär sein. Die Kreiszellenmethode erweist sich als sehr gut geeignet, um die makroskopischen magnetischen Eigenschaften eines Flußliniengitters zu berechnen. Nur besondere Feinheiten, wie z.B. die optimale Symmetrie des Fluß-

liniengitters, werden durch diese Näherung nicht erfaßt. Aus diesem Grund beschränken wir uns im folgenden - wie in [1.13] - auf die Kreiszellenmethode und damit auf rotationssymmetrische Strukturen.

b) Die Differentialgleichung für rotationssymmetrische Flußlinien

Um die freie Enthalpie einer Flußlinie in einer solchen Zelle anzugeben, gehen wir von Gl. (1.12) und (1.16) aus und spalten die Funktion  $\psi(\underline{r})$  gemäß  $\psi(\underline{r})=f(\underline{r})\exp(i\cdot\varphi(\underline{r}))$  auf. Wegen der Rotationssymmetrie können wir dann verlangen, daß nur  $f$  und nicht  $\varphi$  vom Radius  $r$  abhängt. Ebenso können das Magnetfeld  $h(r)$  und das Vektorpotential  $a(r)$  als skalare Funktionen des Radius angesehen werden. Es ist zweckmäßig, anstelle des Vektorpotentials  $a(r)$  eine Größe einzuführen, die dem Suprastrom proportional ist, nämlich:

$$v(r) = \kappa_3^{-1} \nabla \varphi - a(r) = \frac{1}{\kappa_3 r} - a(r) \quad (3.1)$$

Für die Energie einer Flußlinie in einer Zelle vom Radius  $R$  ergibt sich dann (in enger Analogie zu Gl. (2.14) für die S-N-Wand):

$$F = \frac{H_c^2 \lambda^2 R}{2} \int_0^R r dr [(h-h_a)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-f^2)^2 + \kappa_3^{-2} f'^2 + f^2 v^2 + \mathcal{P}(r)]$$

$$P(r) = \tilde{n}_c P_c + \tilde{n}_w P_w + \tilde{n}_k P_k + n_{4c} P_{4c}$$

$$P_c = f^2 (1-f^2)^2$$

$$P_w = \kappa_3^{-2} f'^2 f'^2$$

$$P_k = -(1-f^2) (\kappa_3^{-2} f'^2 + f^2 v^2)$$

$$P_{4c} = \kappa_3^{-2} (-4f' ( \kappa_3^{-2} f' / r - f v^2 ) + 2(f' v + f v' - f v / r)^2) \quad (3.2)$$

Die zugehörigen Randbedingungen lauten:

$$f(0) = 0, \quad a(0) = 0, \quad f'(R) = 0, \quad v(R) = 0 \quad (3.3)$$

Das Magnetfeld  $h(r)$  hängt mit  $v(r)$  und  $a(r)$  durch:

$$h(r) = -(v'(r)+v(r)/r) = a'(r)+a(r)/r \quad (3.4)$$

zusammen. Aus (3.4) und (3.3) ergeben sich die Beziehungen:

$$h'(0) = h'(R) = 0 \quad (3.3a)$$

$$\int_0^R h(r)rdr = \kappa_3^{-1} \quad (3.5)$$

Gl. (3.5) gibt die schon erwähnte Quantisierung des Magnetflusses (in reduzierten Einheiten) wieder.

Aus der Variation der freien Energie (3.2) ergeben sich folgende Differentialgleichungen für  $f(r)$  und  $v(r)$ :

$$\begin{aligned} & f(1-f^2) + \kappa_3^{-2}(f''+f'/r) - fv^2 \\ & + \delta\tilde{\eta}_c f(1-f^2)(1-3f^2) - \delta\tilde{\eta}_k (\kappa_3^{-2}(f''+f'/r) - fv^2(1-2f^2)) \\ & + \delta(\tilde{\eta}_k + \tilde{\eta}_w) \kappa_3^{-2} f(ff''+f'^2+ff'/r) \\ & - \delta\eta_{4c} \kappa_3^{-2} f(2vv''+3v'^2+8vv'/r+v^2/r^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & v''+v'/r-v/r^2-f^2v+\delta\tilde{\eta}_k f^2(1-f^2)v \\ & + \delta\eta_{4c} [f^2(v''+v'/r-v/r^2)+2ff'(v'+2v/r)-2(ff''+f'^2)v] = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Lösungen der Gleichungen (3.6), (3.7) und (3.3) existieren für verschiedene Werte des Zellenradius  $R$ ; diese sind dann für verschiedene Werte des äußeren Feldes  $h_a$  gültig. Während bei kleinen Feldern die Flußlinien weit voneinander entfernt sind, rücken sie bei größeren Feldern immer dichter zusammen, bis sie bei einer oberen kritischen Feldstärke  $H_{c2}$  verschwinden. Es existiert

demnach für einen Typ-II-Supraleiter ein Feldstärkeintervall  $H_{c1} < H_a < H_{c2}$ , in dem ein Flußlinienzustand stabil ist. Dabei muß stets  $H_{c1} \leq H_c \leq H_{c2}$  gelten. Während der Wert von  $H_{c1}$  und der Verlauf  $R(h_a)$  nur numerisch gewonnen werden können, lassen sich  $H_{c2}$  und auch die Wechselwirkung weit entfernter Flußlinien bei  $H_{c1}$  mittels geeigneter Linearisierungen der Gleichungen (3.6) und (3.7) analytisch berechnen.

### 3.3 Das Verhalten der Funktionen $f(r)$ und $h(r)$ für große $r$

Für große Abstände vom Flußlinienkern können wir  $f \approx 1$  und  $v \approx 0$  setzen. Führen wir die Funktion  $g = 1 - f$  ein und vernachlässigen in (3.6) und (3.7) alle Glieder, die von höherer als von erster Ordnung in  $g$  und  $v$  oder deren Ableitungen sind, dann ergeben sich folgende Differentialgleichungen:

$$2(1 + 2\vartheta\tilde{\eta}_c)g - \kappa_3^{-2}(1 + \vartheta\tilde{\eta}_w)g'' = 0 \quad (3.8)$$

$$(1 + \vartheta\eta_{4c}\kappa_3^{-2})(v'' + v'/r - v/r^2) - v = 0 \quad (3.9)$$

$g(r)$  und  $v(r)$  sind also für große  $r$  voneinander entkoppelt und als Lösung ergeben sich:

$$g(r) = C_1 \cdot K_0(r \cdot k_1), \quad k_1 = 2\kappa_3 \sqrt{\frac{1 + 2\vartheta\tilde{\eta}_c}{1 - 3\vartheta\tilde{\eta}_w}} \quad (3.10)$$

$$v(r) = C_2 \cdot K_1(r \cdot k_2), \quad k_2 = 1/\sqrt{1 + \vartheta\eta_{4c}\kappa_3^{-2}} \quad (3.11)$$

wobei  $K_0(x)$  und  $K_1(x)$  modifizierte Besselfunktionen sind, die wie  $e^{-x/\sqrt{x}}$  für  $x \rightarrow \infty$  verschwinden. Aus (3.11) und (3.4) ergibt sich auch das Magnetfeld  $h(r)$ :

$$h(r) = C_3 \cdot K_0(r \cdot k_2) \quad (3.12)$$

Sowohl  $g(r)$  wie  $h(r)$  verschwinden also für große  $r$  wie  $K_0(kr)$ ,

allerdings mit verschiedenen Koeffizienten  $k_1$  bzw.  $k_2$ . Nun konnte Jacobs [3.6] auf der Grundlage einer Arbeit von Kramer [3.7] zeigen, daß mit dem Magnetfeld  $h(r)$  bei großen Abständen stets eine abstoßende Wechselwirkung zwischen verschiedenen Flußlinien verbunden ist, während die Abweichung  $g(r)$  zu einer Anziehung führt. Wenn  $k_2$  kleiner als  $k_1$  ist, wird also für große  $r$  stets die abstoßende Wechselwirkung überwiegen, während umgekehrt bei  $k_1 < k_2$  die Anziehung zwischen den Flußlinien überwiegt. Ersteres ist nach (3.10) und (3.11) bei großen  $\kappa$  der Fall, letzteres bei kleinen  $\kappa$ . Der kritische Wert  $\kappa_W$  für den Übergang von der Anziehung zur Abstoßung berechnet sich aus  $k_1 = k_2$  zu:

$$\frac{\kappa_W}{1+\vartheta} = \kappa_{3W} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+\vartheta\tilde{\eta}_W}{1+2\vartheta\tilde{\eta}_c}} - 2\vartheta\eta_{4c} \cong \frac{1}{\sqrt{2}} [1+\vartheta(-\tilde{\eta}_c + \frac{1}{2}\tilde{\eta}_W - \eta_{4c})] \quad (3.13)$$

Für den Ginzburg-Landau-Fall ( $\vartheta=0$ ) gilt  $\kappa_W = \kappa_{SN} = 1/\sqrt{2}$ . Für  $\vartheta > 0$  fallen jedoch  $\kappa_{SN}$  und  $\kappa_W$  auseinander, und zwar ist in der Regel (für  $\alpha \lesssim 50$ )  $\kappa_W$  größer als  $\kappa_{SN}$ . In dem Intervall  $\kappa_{SN} < \kappa < \kappa_W$  liegt wegen  $\sigma_{SN} < 0$  auf jeden Fall ein Typ-II-Supraleiter vor, in dem jedoch einzelne Flußlinien nicht stabil sind.  $\kappa_W$  stellt die obere Grenze für den Existenzbereich eines Zwischenzustandes in Typ-II-Supraleitern dar. Zur Berechnung der unteren Grenze betrachten wir einen anderen Grenzfall, nämlich denjenigen sehr hoher äußerer Felder.

#### 3.4 Berechnung der oberen kritischen Feldstärke $H_{c2}$

Für sehr große äußere Felder, für die die Supraleitung nahezu unterdrückt ist, kann man  $f$  als kleine Größe auffassen und das Magnetfeld annähernd konstant annehmen. Aus  $h = h_a = h_{c2}$  und der Randbedingung (3.3) folgt für die Funktion  $v(r)$ :

$$v(r) = \frac{1}{\kappa_3 r} (1 - r^2/R_{c2}^2) \quad (3.14)$$

wobei zwischen dem Zellenradius  $R_{c2}$  und  $h_{c2}$  der Zusammenhang

$$h_{c2} = 1/(\kappa_3 R_{c2}^2) \quad (3.15)$$

besteht. Setzen wir diesen Ausdruck in (3.6) ein und vernachlässigen alle Glieder, die von höherer als erster Ordnung in  $f$  sind, dann ergibt sich für  $f(r)$  die Differentialgleichung:

$$(1-\vartheta\tilde{\eta}_c)f + (1-\vartheta\tilde{\eta}_w)\kappa_3^{-2}(f'' + f'/r - f(1-r^2/R_{c2}^2)/r^2) - 12\vartheta\eta_{4c}\kappa_3^{-4}R_{c2}^{-4} \cdot f = 0 \quad (3.16)$$

Wir versuchen folgenden Ansatz [3.8], der den Randbedingungen genügt:

$$f = C \cdot r \cdot e^{-r^2/(2R_{c2}^2)} \quad (3.17)$$

Dieser Ansatz ergibt eine Lösung der Differentialgleichung (3.15), falls folgende Eigenwertgleichung erfüllt ist:

$$(1-\vartheta\tilde{\eta}_c) - 2(1-\vartheta\tilde{\eta}_k)(\kappa_3 R_{c2})^{-2} - 12\vartheta\eta_{4c}(\kappa_3 R_{c2})^{-4} = 0 \quad (3.18)$$

Daraus folgt für die obere kritische Feldstärke

$$h_{c2} = \frac{2\kappa_3(1+\vartheta\tilde{\eta}_c)}{1+\vartheta\tilde{\eta}_k + \sqrt{(1+\vartheta\tilde{\eta}_k)^2 + 12\vartheta\eta_{4c}(1+\vartheta\tilde{\eta}_c)}} \approx \kappa_3[1+\vartheta(-\tilde{\eta}_c + \tilde{\eta}_k - 3\eta_{4c})] \quad (3.19)$$

Eine genauere Diskussion ergibt nun [3.2], daß immer wenn  $h_{c2} > 1/\sqrt{2}$  oder  $H_{c2} > H_c$  gilt, ein Flußlinienzustand für  $H_a < H_{c2}$  stabil ist und folglich ein Typ-II-Supraleiter vorliegt. Als kritischen  $\kappa$ -Wert für das Einsetzen der Typ-II-Supraleitung erhalten wir folglich aus  $h_{c2} = 1/\sqrt{2}$  den Wert  $\kappa_H$ :

$$\frac{\kappa_H}{1+\vartheta\phi} = \kappa_{3H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\vartheta\tilde{\eta}_k + \sqrt{(1-\vartheta\tilde{\eta}_k)^2 + 12\vartheta\eta_{4c}(1-\vartheta\tilde{\eta}_c)}}{2(1-\vartheta\tilde{\eta}_c)} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} [1+\vartheta(\tilde{\eta}_c - \tilde{\eta}_k + 3\eta_{4c})] \quad (3.20)$$

Die drei kritischen  $\kappa$ -Werte  $\kappa_{SN}$ ,  $\kappa_W$  und  $\kappa_H$  sind in Fig. 3.3 als Funktion von  $\vartheta$  für zwei Werte von  $\alpha$  aufgetragen. Bei  $\vartheta=0$



fallen alle drei Werte mit  $\kappa=1/\sqrt{2}$  zusammen. Für  $\vartheta>0$  ist jedoch stets  $\kappa_H$  kleiner als  $\kappa_W$ .  $\kappa_{SN}$  liegt zwischen den beiden anderen kritischen  $\kappa$ -Werten.

Auf diese Weise entsteht ein Phasendiagramm für die supraleitenden Eigenschaften eines Metalls. Für  $\kappa<\kappa_H$  liegt reines Typ-I-Verhalten vor, für  $\kappa_H<\kappa<\kappa_W$  gibt es ein Feldintervall, in dem ein für Typ-II-Supraleiter typisches Flußliniengitter stabil ist, wobei aber eine anziehende Wechselwirkung zwischen Flußlinien in großem Abstand besteht\*. Für  $\kappa>\kappa_W$  schließlich erwartet man einen reinen Typ-II-Supraleiter mit sich gegenseitig abstoßenden Flußlinien, wie er aus der GL-Theorie her bekannt ist.

Im folgenden Abschnitt wollen wir uns eingehender mit den Eigenschaften der Flußlinien im Intervall  $\kappa_W>\kappa>\kappa_H$  beschäftigen.

### 3.5 Die Eigenschaften des Flußliniengitters im Bereich anziehender Wechselwirkungen

Die Differentialgleichungen [3.6] und [3.7] lassen sich nach dem schon mehrfach erläuterten Verfahren (Abschn. II. 3.4b) ohne Schwierigkeiten lösen [3.10, 1.12]. Das Problem ist gegenüber dem Fall der S-N-Wand insofern einfacher, als für die Variable  $a(r)$  aus (3.3) wohldefinierte Randwerte ( $a(0)=0$ ,  $a(R)=1/(\kappa_3 R)$ ) hervor gehen. Faßt man also (3.6) und 3.7) als Differentialgleichungen für  $f(r)$  und  $a(r)$  auf, dann nimmt die Wechselwirkungsmatrix  $F_{nm}$  (s. II.3.4b) wie in magnetischen Problemen eine Bandform an.

Das äußere Feld  $h_a$  erscheint nicht in den Differentialgleichungen oder in den Randbedingungen, es geht nur in die Gesamtenergie ein. Bezeichnen wir mit  $e(R)$  den Wert des Integrals in Gl. (3.2) für  $h_a=1/\sqrt{2}$ , dann schreibt sich die Energie der Flußlinien unter Benutzung von (3.5) in folgender Form:

$$F = 0.5 H_c^2 \lambda^2 [e(R) - 2\kappa_3^{-1} (h_a - 1/\sqrt{2}) + 0.5 R^2 (h_a^2 - 1/2)] \quad (3.21)$$

Die Energie pro Volumeneinheit der Probe im Flußlinienzustand

\* Es wurde vorgeschlagen, derartige Supraleiter als eigenen Typ II' zu klassifizieren [3.9]

beträgt  $G/(\pi R^2 \lambda^2)$ . Minimalisieren wir diese Energie bei gegebenem äußeren Feld in Bezug auf den Zellenradius  $R$ , dann ergibt sich die Gleichung:

$$R_0 e'(R_0) = 2[e(R_0) - 2\kappa_3^{-1}(h_a - 1\sqrt{2})] \quad (3.22)$$

Zum Vergleich beträgt die Energie des Meissnerzustandes  $H_c^2 \lambda / (4\pi)(h_a^2 - \frac{1}{2})$ . Beim unteren kritischen Feld  $H_{c1}$  sind definitionsgemäß die Energien des Meissnerzustandes und des Flußlinienzustandes gleich. Aus dieser Bedingung und aus (3.22) folgen als Bestimmungsgleichungen für  $h_{c1}$  und den zugehörigen Zellenradius  $R_{c1}$ :

$$e'(R_{c1}) = 0 \quad (3.23)$$

$$h_{c1} - 1/\sqrt{2} = 0.5 \kappa_3 e(R_{c1}) \quad (3.24)$$

Die Bedingung (3.23) wird stets von  $R_{c1} = \infty$  erfüllt. Falls die Kurve  $e(R)$  kein weiteres Minimum besitzt, dann bestimmt nach Gl. (3.24) die Energie der isolierten Flußlinie  $e(\infty)$  die untere kritische Feldstärke. Bei  $H_{c1}$  tritt zunächst eine einzelne Flußlinie ein, und erst in höheren Feldern weitere. Abgesehen von den durch die Flußquantisierung bedingten kleinen Sprüngen ist der Übergang vom Meissnerzustand zum Flußlinienzustand stetig.

Besitzt dagegen die Kurve  $e(R)$  ein weiteres, tiefer liegendes Minimum bei endlichen Werten von  $R$ , dann erfolgt der Eintritt des Magnetflusses bei  $H_{c1}$  spontan mit der Flußdichte

$b_0 = B_0 / (\sqrt{2} H_c) = 2 / (\kappa_3 R_{c1}^2)$ . Der Übergang vom Meissner- zum Flußlinienzustand erfolgt also unstetig (Fig. 3.4a), ebenso wie der Übergang vom Meissnerzustand in den normalleitenden Zustand in Typ-I-Supraleitern. Dies gilt allerdings nur für Proben mit einem verschwindenden Entmagnetisierungsfaktor. Bei endlichen Proben führt die Unstetigkeit in der Magnetisierungskurve (ganz analog zu dem in 1.4 behandelten Fall der Typ-I-Supraleiter) zu

der Möglichkeit eines Zwischenzustands. Liegt das äußere Feld zwischen  $(1-N)H_{c1}$  und  $H_{c1}$ , dann zerfällt die magnetische Struktur in Meissner-Domänen einerseits und flußtragende Domänen andererseits, wobei letztere aus dem bei  $H_{c1}$  stabilen Flußliniengitter bestehen.

Eine solche Domänenstruktur kann nicht entstehen, wenn der Übergang bei  $H_{c1}$  stetig ist, wenn also  $R_{c1} = \infty$  gilt.

Numerische Ergebnisse für  $e(R)$  finden sich in Fig. 3.5. Erwartungsgemäß zeigen sich im Intervall  $\kappa_H < \kappa < \kappa_W$  ausgeprägte Minima der Funktion  $e(R)$  mit negativen Werten  $e(R_{c1})$ . Für  $\kappa < \kappa_H$  wird der Minimalwert von  $e(R)$  größer als Null, sodaß kein stabiler Flußlinienzustand existieren kann. Für  $\kappa > \kappa_W$  gibt es kein Minimum der Funktion  $e(R)$  bei endlichen  $R$ .

In Fig. 3.6 sind einige wichtige Eigenschaften des Gleichgewichtszustandes bei  $H_{c1}$  als Funktion von  $\kappa$  aufgetragen. Um die Kurven bei verschiedenen Temperaturen  $\vartheta$  und verschiedenen Werten des Verunreinigungsparameters  $\alpha$  besser vergleichen zu können, führen wir eine reduzierte Variable  $\delta\kappa$  gemäß

$$\kappa = \kappa_H + \delta\kappa(\kappa_W - \kappa_H) \quad (3.25)$$

ein. Es zeigt sich, daß die Kurven in dieser Darstellung in erster Näherung unabhängig von  $\vartheta$  und  $\alpha$  sind. Aus diesen Größen wollen wir im nächsten Abschnitt versuchen, eine Abschätzung für die in 3.1 erläuterte Wandenergie zu gewinnen.

### 3.6 Abschätzung der Wandenergie zwischen Flußliniengitter und Meissnerzustand als Folge der anziehenden Wechselwirkung

Aus Gl. (3.21) läßt sich die Bindungsenergie einer Flußlinie in ihrem Gleichgewichtsgitter bei  $H_{c1}$  ableiten. Bei gegebenem äußeren Feld  $H_a = H_{c1}$  beträgt der Energieunterschied zwischen einer

isolierten Flußlinie und der Flußlinie im Gitter:

$$\Delta E = 0.5 \frac{H_c^2 \lambda^2}{c} [e(\infty) - e(R_{c1})] \quad (3.26)$$

gerechnet pro Längeneinheit der Flußlinie. Eine Abschätzung der Energie der Domänengrenze gewinnen wir nun dadurch, daß wir die Bindungsenergie in erster Näherung als eine Summe von Bindungen über benachbarte Flußlinien auffassen.

Wir legen ein Dreiecksgitter zugrunde und betrachten eine Grenzfläche parallel zu einer dichtgepackten Ebene (Fig. 3.7). Dann fehlen den Rand-Flußlinien je zwei von sechs nächsten Nachbarn, sodaß in dieser Näherung jede Randflußlinie eine um  $\Delta E/3$  erhöhte Energie pro Längeneinheit aufweisen sollte. Im Dreiecksgitter beträgt der Abstand nächster Nachbarn  $\sqrt{2\pi/\sqrt{3}}\lambda$ . Pro Flächeneinheit der Wand ergibt sich folglich eine Energieerhöhung von

$$\sigma_{SF} = \frac{H_c^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi/\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e(\infty) - e(R_{c1})}{R_{c1}} \quad (3.27)$$

Diese Funktion ist in geeigneter Normierung in Fig. 3.6 für verschiedene Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  als Funktion von  $\delta\kappa$  aufgetragen. Auffallend ist, daß die Wandenergie mit zunehmenden  $\delta\kappa$  wesentlich stärker abfällt als etwa die Anfangsinduktion  $b_0$ . Oberhalb  $\delta\kappa=0.7$  sollte ein Zwischenzustand wegen der zu kleinen Wandenergie kaum noch zu beobachten sein, vor allem wenn Gitterstörungen die Anordnung der Flußlinien beeinträchtigen. Im Gegensatz dazu sollte die Anfangsinduktion  $b_0$  in diesem Bereich noch leicht zu messen sein. Dieser Befund steht in Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen von Krägeloh [3.11] für die Wandenergie und von Kumpf [3.12] für die Anfangsinduktion  $B_0$ .

Der Verlauf der Funktion  $\sigma_{SF}(\kappa)/\sigma_{SF}(\kappa_H)$  entspricht für  $\kappa \gg \kappa_H$  recht gut dem Verlauf der Funktion  $b_0^2(1-f^{-2})^2$ . Wie vermutet, hängt also  $\sigma_{SF}$  mit der mittleren Flußdichte  $b_0$  einerseits und dem Mittelwert der Funktion  $f(r)=|\psi(r)|$  andererseits zusammen.

Bei  $\kappa = \kappa_H$  sollte  $\sigma_{SF}$  stetig in  $\sigma_{SN}(\kappa_H)$  einmünden, da der Flußlinienzustand bei diesem Wert von  $\kappa$  stetig in den normalleitenden Zustand mit  $H = H_c$  übergehen. In der Tat weichen  $\sigma_{SF}(\kappa_H)$  und  $\sigma_{SN}(\kappa_H)$  für alle gerechneten Beispiele um weniger als 10% voneinander ab (Tab. 3.1). Die Abweichungen dürften durch die Gl. (3.23) zu Grunde liegenden Näherungen (die Kreiszellennäherung für die Berechnung der Flußlinien und die Annahme von Wechselwirkungen nur nächster Nachbarn im Flußliniengitter) bedingt sein. Gegebenenfalls läßt sich die Abschätzung der S-F-Wandenergie aus der Bindungsenergie der Flußlinien dadurch verbessern, daß man den Wert  $\sigma_{SN}(\kappa_H)$  zur Normierung der Funktion  $\sigma_{SF}(\delta\kappa)$  heranzieht. Auf diesem Wege ließe sich auch die in Abschn. 2.3 behandelte Anisotropie der Wandenergie auf die S-F-Wandenergie übertragen.

Wir fassen zusammen: Aus der Neumann-Tewordt-Theorie läßt sich eine Abschätzung der Energie der Domänenwand zwischen Meissner- und Flußlinienbereichen in Typ-II-Supraleitern gewinnen, die stetig in die Energie der gewöhnlichen S-N-Wand in Typ-I-Supraleitern übergeht. Durch eine geeignete reduzierte Darstellung wird die gefundene Kurve  $\sigma_{SF}(\kappa)$  in erster Näherung unabhängig von  $\mathfrak{S}$  und  $\alpha$ . (Fig. 3.6 und Gl.(3.27)). Um sie auf bestimmte Werte von  $\mathfrak{S}$  und  $\alpha$  anzuwenden, benötigt man nur die jeweiligen Werte der kritischen  $\kappa$ -Werte  $\kappa_H$  und  $\kappa_W$ , die durch (3.13), (3.20) und die Definitionen (1.14-16) analytisch aus  $\mathfrak{S}$  und  $\alpha$  abzuleiten sind.

Der gefundene funktionale Verlauf  $\sigma_{SF}(\kappa)$  steht in guter Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen [3.11].

### 3.7 Möglichkeiten der Verallgemeinerung der Rechnungen auf tiefere Temperaturen

Wir haben alle unsere Rechnungen zur Wandenergie in Supraleitern auf die Ginzburg-Landau-Theorie und ihre Erweiterungen gestützt, die in der Umgebung der kritischen Temperatur  $T_c$  gültig sind. Bei tieferen Temperaturen müßte man z.B. zur Gorkov-Theorie [1.8] übergehen, um zuverlässige Aussagen zu gewinnen. Bisher ist es

allerdings erst in Ansätzen gelungen, Flußlinien oder S-N-Wände in geschlossener Form aus einer solchen mikroskopischen Theorie abzuleiten. Einen wichtigen Beitrag zur Untersuchung der Flußlinien im Rahmen der Gorkov-Theorie lieferten Eilenberger und Büttner [3.13], und ausgehend von dieser Arbeit gelang es kürzlich Leung und Jacobs [3.14], wenigstens die Existenzgrenzen  $\kappa_H$  und  $\kappa_W$  des Bereichs anziehender Wechselwirkungen zwischen Flußlinien für beliebige Temperaturen zu berechnen (s. hierzu auch [3.15]). Dabei stellte sich allerdings auch heraus, daß diese Rechnungen nicht quantitativ mit experimentellen Resultaten [3.9] übereinstimmen.

Ein wichtiges Ergebnis unserer Rechnungen auf der Grundlage der Neumann-Tewordt-Theorie war es gewesen, daß die reduzierten Darstellungen, die alle Größen auf das Intervall  $(\kappa_W - \kappa_H)$  beziehen (Fig. 3.6) nur schwach von den äußeren Parametern  $\alpha$  und  $\phi$  abhängen, auch wenn  $\kappa_H$  und  $\kappa_W$  selbst stark von  $\alpha$  und  $\phi$  abhängen. Man kann deshalb vermuten, daß diese reduzierten Darstellungen auch dann noch näherungsweise gültig bleiben, wenn man für  $\kappa_H$  und  $\kappa_W$  anstelle der NT-Werte (3.13) und (3.20) zum Beispiel die Werte von Leung und Jacobs oder auch experimentelle Werte einsetzt.

Den erwähnten Arbeiten zur Theorie der Flußlinien stehen einige Arbeiten zur Berechnung der S-N-Wand aus einer mikroskopischen Theorie gegenüber. Kümmel [3.16] berechnete die S-N-Wand im Grenzfall kleiner  $\kappa$ , während Hu [3.17] die S-N-Wand für beliebige  $\kappa$  mit Hilfe eines Variationsverfahrens berechnete. Allerdings gestatten es die dieser Rechenmethode anhaftenden Fehlermöglichkeiten noch nicht, aus den Ergebnissen quantitative Schlüsse etwa für die in Tab. 3.1 erscheinende Größe  $\sigma_{SN}(\kappa_H)$  zu ziehen.

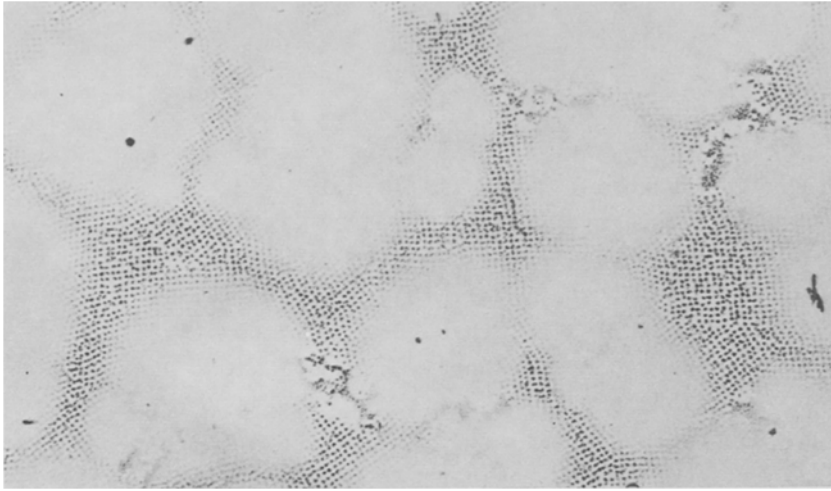
- 
- [3.1] A.A. Abrikosov, *Ž. Exp. Teor. Fiz.* 32, 1442 (1957) [*Sov. Phys. JETP* 5, 1174 (1957)]  
 [3.2] A.E. Jacobs, *Phys. Rev. B*, 4, 3022 (1971)  
 [3.3] U. Krägeloh, *Phys. Letters* 28A, 652 (1969)

- [3.4] N.V. Sarma, Phil. Mag. 18, 171 (1968)
- [3.5] P.M. Marcus, IX. Int. Conf. Low Temp. Phys.,  
New York 1965, Bd. A, S. 550; Int. Conf. Low Temp.  
Phys., Moskau 1966, Bd. IIA, S. 345
- [3.6] A.E. Jacobs, Phys. Rev. B, 4, 3029 (1971)
- [3.7] L. Kramer, Phys. Letters 23, 619 (1966)
- [3.8] D. Ihle, phys. stat. sol. (b), 47, 423 (1971)
- [3.9] J. Auer, H. Ullmaier, Phys. Rev. B 7, 136 (1973)
- [3.10] L. Kammerer, Computer Phys. Commun. 1, 10 (1969)
- [3.11] U. Krägeloh, phys. stat. sol. 42, 559 (1970)
- [3.12] U. Kumpf, phys. stat. sol. (b), 44, 829 (1971)
- [3.13] G. Eilenberger, H. Büttner, Z. Physik 224, 335 (1969)
- [3.14] M.C. Leung, A.E. Jacobs, XIII. Int. Conf. Low Temp.  
Phys., Boulder 1972
- [3.15] L. Kramer, wird veröffentlicht
- [3.16] R. Kümmel, Phys. Rev. B 3, 3787 (1971)
- [3.17] C.-R. Hu, Phys. Rev. B, 6, 1 (1972)

Tabelle 3.1

Vergleich zwischen der aus der Wechselwirkung der Flußlinien berechneten Wandenergie der Wand zwischen Meissner- und Flußlinienzustand  $\sigma_{SF}$  (Gl. (3.27)) und der gewöhnlichen S-N-Wandenergie  $\sigma_{SN}$  für  $\kappa = \kappa_H$ . Außerdem sind die jeweiligen kritischen  $\kappa$ -Werte  $\kappa_H$ ,  $\kappa_W$  und  $\kappa_{SN}$  angegeben.  $C = 4\pi / (H_c^2 \lambda (\kappa_W - \kappa_H))$

$\alpha$	$S$	$\kappa_H$	$\kappa_W$	$\frac{\kappa_{SN} - \kappa_H}{\kappa_W - \kappa_H}$	$C \cdot \sigma_{SF}(\kappa_H)$	$C \cdot \sigma_{SN}(\kappa_H)$
0	0.02	0.7011	0.7203	0.286	0.341	0.315
0	0.1	0.6720	0.7687	0.317	0.374	0.355
1	0.02	0.7036	0.7125	0.283	0.337	0.311
1	0.1	0.6891	0.7315	0.300	0.355	0.332
5	0.02	0.7050	0.7075	0.280	0.336	0.307
5	0.1	0.6971	0.7084	0.291	0.347	0.320



5  $\mu\text{m}$

Fig. 3.1 Experimentelle Beobachtung des Zwischenzustands in einem Typ-II-Supraleiter (Niob, (100)-Oberfläche,  $T=1.2$  K, elektronenmikroskopische Abdruckaufnahme von U. Essmann (1971)). Die Struktur ähnelt im Großen einer gewöhnlichen Domänenstruktur in einem Typ-I-Supraleiter, jedoch bestehen hier die flußtragenden, dunkleren Domänen aus einem Flußliniengitter.

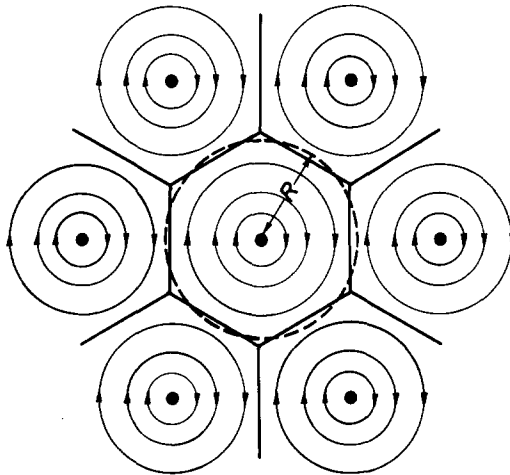


Fig. 3.2 Flußlinien-Dreiecksgitter mit der hexagonalen Wigner-Seitz Zelle. Gestrichelt: kreisförmige Näherungszelle.



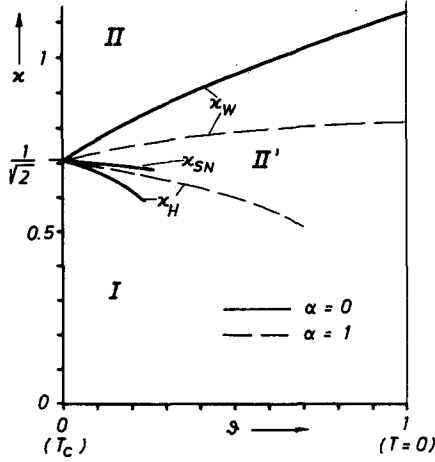


Fig. 3.3 Die kritischen  $\kappa$ -Werte als Funktion der reduzierten Temperatur nach Gl. (3.13) und (3.19) für zwei verschiedene Werte des Verunreinigungsparameters  $\alpha$ .

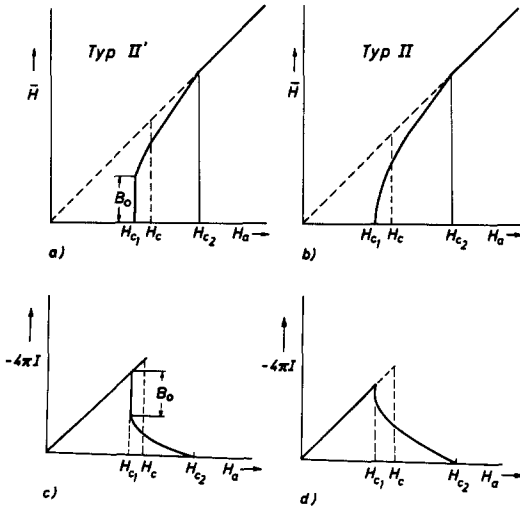


Fig. 3.4 Charakteristische Kurven für das mittlere innere Magnetfeld als Funktion des äußeren Magnetfelds. a) Fall einer anziehenden Wechselwirkung zwischen weit entfernten Flußlinien mit der Folge eines unstetigen Phasenübergangs bei  $H_{c1}$ , b) Fall der abstoßenden Wechselwirkung zwischen den Flußlinien mit einem stetigen Phasenübergang bei  $H_{c1}$ . c) und d): Zugehörige Magnetisierungskurven.

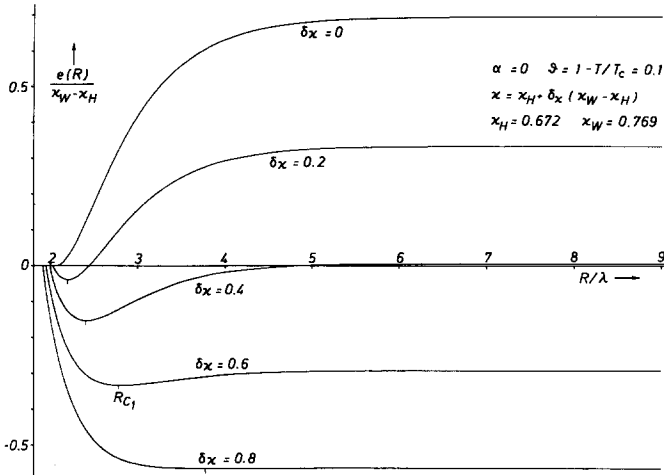


Fig. 3.5 Die freie Energie der Flußlinie als Funktion des Zellenradius  $R$ , berechnet für  $H_a = H_c$ . Ein Minimum in diesen Kurven mit einer negativen freien Energie in diesem Minimum zeigt nach Gl. (3.23, 3.24) einen stabilen gebundenen Zustand der Flußlinien an. Man findet dieses Verhalten in dem Intervall  $\kappa_H < \kappa < \kappa_W$  oder  $0 < \delta\kappa < 1$ .

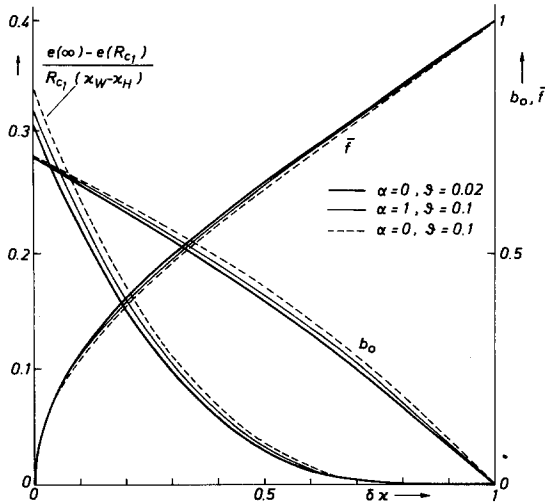


Fig. 3.6 Einige charakteristische Größen des bei  $H_{c1}$  eindringenden Gleichgewichts-Flußliniengitters als Funktion von  $\kappa$ .  $\bar{f}$  ist der Mittelwert des Betrages der Wellenfunktion  $\psi$ ,  $b_0$  der Mittelwert des inneren magnetischen Feldes.  $e(\infty) - e(R_{C1})$  ist der Bindungsenergie der Flußlinien im Gleichgewichtsgitter proportional.

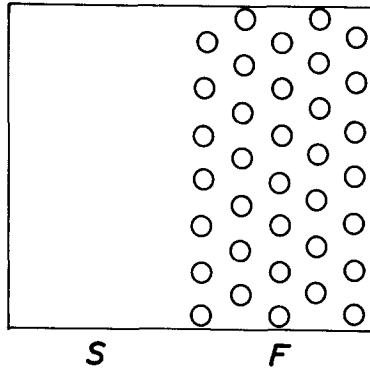


Fig. 3.7 Schematische Darstellung einer Domänenwand zwischen einem supraleitenden (Meißner-)Bereich und einem Flußlinien-gitter-Bereich.