

Finite Elemente für Ingenieure 2

Springer

Berlin

Heidelberg

New York

Hongkong

London

Mailand

Paris

Tokio

Engineering  **ONLINE LIBRARY**
springer.de

Josef Betten

Finite Elemente für Ingenieure 2

Variationsrechnung, Energiemethoden,
Näherungsverfahren, Nichtlinearitäten,
Numerische Integrationen

Zweite, neu bearbeitete und erweiterte Auflage



Springer

Univ.-Professor. Dr.-Ing. habil. JOSEF BETTEN
RWTH Aachen
Mathematische Modelle in der Werkstoffkunde
und Kontinuumsmechanik
Templergraben 55
52056 Aachen
e-mail: betten@mmw.rwth-aachen.de

ISBN 3-540-20447-4 2. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 3-540-63240-9 1. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische
Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> aufrufbar

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer-Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1998 und 2004
Printed in Germany
www.springer.de

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert werden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Einbandgestaltung: Medio AG, Berlin

Satz: Digitale Druckvorlage des Autors
7/3020 uw – Gedruckt auf säurefreiem Papier – 5 4 3 2 1 0

Vorwort zur zweiten Auflage

Die Neuauflage stellt eine wesentliche Erweiterung der ursprünglichen Fassung dar. Beispielsweise wird so die *numerische Integration* sehr ausführlich in einem neuen Abschnitt (Ziffer 7.5) auf etwa 86 Seiten behandelt. Zur Ermittlung von *Steifigkeitsmatrizen*, *Massenmatrizen* oder auch *Fehlernormen* sind ein- und mehrdimensionale Integralausdrücke auszuwerten. Häufig ist eine exakte Integration nur schwerfällig oder gar nicht durchführbar, so dass man in solchen Fällen auf eine *numerische Integration (Quadratur)* angewiesen ist. Hierzu wird im eindimensionalen Fall die *NEWTON-COTES-Integration* der *GAUSS-LEGENDRE-Quadratur* gegenübergestellt, die sich durch höhere Genauigkeit auszeichnet und daher im weiteren ausschließlich verwendet wird. Zu der Fülle von Beispielen zählen *elliptische Integrale*, *BESSEL-Funktionen*, (*hyperbolischer*) *Integral-kosinus*, *FRESNELsche Integrale*, um nur einige zu nennen.

Zur Lösung von ebenen Problemen nach der Finiten Elemente Methode werden *zweidimensionale Integrale* über *Rechteck-* und *Dreieckselemente* numerisch ausgewertet.

Ebenfalls werden *dreidimensionale Integrale* über *Hexaeder-* und *Tetraeder Elemente* numerisch ausgewertet. Auch hierbei zeichnet sich die *GAUSS-LEGENDRE-Quadratur* durch hohe Genauigkeit aus, wie an vielen (einigen?) Beispielen (exemplarisch) gezeigt wird.

Alle bisherigen Kapitel wurden übernommen, allerdings mit teilweise umfangreichen Ergänzungen. Das gilt auch für die Lösungen der bisherigen und neu hinzu gekommenen Übungsaufgaben. Die vollständig ausgearbeiteten Lösungen findet man auf der CD-ROM. Hierbei wurde wieder großer Wert auf die Deutung der Ergebnisse gelegt, damit Studierende lernen, ihre Lösungen kritisch zu betrachten, was häufig in der Praxis nicht genug gepflegt wird.


Meine Lehrveranstaltungen werden nicht nur von „ordentlich“ eingeschriebenen Studierenden der RWTH Aachen besucht, sondern auch von ERASMUS-Stipendiat(Inn)en (seit 1995) und seit WS 2000/2001 von Studierenden des Masterstudienganges *Simulation Techniques in Mechanical Engineering*. Für diese Studierenden sind *Kontinuumsmechanik* und *FEM* Pflichtprüfungsfächer. Aufgrund des umfangreichen Stoffangebotes in der vorliegenden Neuauflage werden den Studierenden Prüfungsschwerpunkte bekannt gegeben.

Durch die Neuauflage werden nicht nur Hörer(innen) meiner Lehrveranstaltungen an der RWTH Aachen angesprochen, sondern auch Teilnehmer von Schulungsseminaren, z.B. in ANSYS oder ABAQUS, oder von Weiterbildungsmaßnahmen und Gastvorlesungen (→ Vorwort zur ersten Auflage), für die das vorliegende Buch grundlegend ist.

Ergänzend zu den Vorlesungen und Übungen in FEM biete ich ein Praktikum zur Einführung in FEM-Programme (ANSYS) für Studierende und Doktoranden an, das mein Mitarbeiter, Herr Dipl.-Ing. U. NAVRATH, im CIP-Pool des Instituts für Werkstoffkunde der RWTH Aachen durchführt. Jedem Teilnehmer steht ein PC zur Verfügung, so dass ein intensives Einarbeiten in FEM-Programme möglich ist (→ Vorwort zur Erstauflage). Aufgrund der großen Nachfrage muss dieses Praktikum mehrmals wöchentlich durchgeführt werden.

Zur Lösung einiger Übungsaufgaben und zur Herleitung einiger Formeln wird die Software MAPLE V in ihrer neuesten Version, Release 8, verwendet. MAPLE ist ein „mathematisches Formelmanipulations-Programm“, mit dem interaktiv gearbeitet werden kann (→ Vorwort zur ersten Auflage).

Die im Textteil und in den Übungen entwickelten Computerprogramme sind auf der beigelegten CD-ROM als MAPLE Worksheet und als MAPLE Text gespeichert, die der Anwender für seine Belange mit entsprechenden Änderungen und speziellen Daten einsetzen kann.

Programme, die nicht eindeutig über eine Übungsnummer zu identifizieren sind, wurden mit einem Hinweis auf den Dateinamen, z.B.  7.5-3.mws versehen.

Die neueste MAPLE-Version, Release 8, ist lauffähig unter Windows, UNIX und Linux.

Weitere Informationen zum MAPLE Programm sowie eine Demoversion sind im Internet unter <http://www.maplesoft.com> oder <http://www.scientific.de> zu finden.

Allen Lesern und Rezensenten, die meine Erstauflage kritisch durchforstet haben, möchte ich für einige Anregungen und Verbesserungsvorschläge danken.

Gedankt sei meinem langjährigen Mitarbeiter, Herrn Dipl.-Ing. U. NAVRATH, der mit unermüdlicher Sorgfalt und großem Geschick die reproduktionsreife Vorlage erstellte. In seinen Händen lag auch die gesamte redaktionelle Koordination, eine Aufgabe, die er wie schon bei der Erstellung meiner früheren Bücher über *Finite-Elemente-Methoden*, *Kontinuumsmechanik* und *Creep Mechanics* mit höchstem Einsatz übernahm. Seine Kompetenz war für mich unverzichtbar. Ihm gilt mein besonderer Dank.

Dem Springer-Verlag, insbesondere Frau E. HESTERMANN-BEYERLE, Frau M. LEMPE, Herrn Dr. D. MERKLE und Herrn Dr. H. RIEDESEL, sei gedankt für die Aufnahme meines Manuskriptes und die verständnisvolle und vorbildliche Zusammenarbeit, die ich auch bei der Drucklegung der ersten Auflage und meiner bisher vom Springer-Verlag herausgegebenen Bücher als angenehm empfand.

Vorwort zur ersten Auflage

Seit einigen Jahren halte ich an der RWTH Aachen im Winter- und Sommersemester Vorlesungen und Übungen zur *Finite-Elemente-Methode (FEM) für Ingenieure*. Der Umfang dieser Lehrveranstaltungen ist mit V2/Ü2 pro Semester durch Studienpläne festgelegt.

Vorlesungsinhalte und vollständige Lösungen der Übungsaufgaben für beide Semester wurden bisher als „Umdruck“ herausgegeben. Nachdem eine vierte korrigierte Auflage vergriffen war, habe ich mich entschlossen, die Vorlesungen mit den vollständig gelösten Übungsaufgaben in zwei Bänden zu veröffentlichen. Der im September 1997 erschienene Band 1 bezieht sich auf das Wintersemester. Die Lehrveranstaltung des Sommersemesters ist im jetzt vorliegenden Band 2 veröffentlicht.

Meine Lehrveranstaltung „Finite-Elemente-Methode für Ingenieure I,II“ soll Studierenden ingenieurwissenschaftlicher Fachrichtungen (ab 5. Semester) einen leichten Zugang zur FEM verschaffen und kann somit auch als intensive Vorbereitung auf Studien- und Diplomarbeiten dienen, in denen sehr häufig die FEM als unverzichtbares Hilfsmittel eingesetzt werden muß. Damit entfallen für viele Studien- und Diplomarbeiter(innen) lange Einarbeitungszeiten.

Neben dem Zweck eines Vorlesungsmanuskriptes soll das vorliegende Buch und der erste Band auch Doktoranden und bereits in der Praxis tätigen Ingenieuren, die zur Behandlung von Problemen der *Strukturmechanik* oder der *Kontinuumsmechanik (solids and fluids)* auf Näherungsverfahren angewiesen sind, einen Einstieg in die FEM verschaffen.

Nach meinen Erfahrungen bevorzugen Studierende ingenieurwissenschaftlicher Fachrichtungen die *induktive Methode*. Aus diesem Grund behandle ich *Variationsrechnung*, *Energiemethoden*, *modifiziertes RITZ-Verfahren*, *Residuenverfahren* und *Nichtlinearitäten* erst im jetzt vorliegenden zweiten Band.

Der erste Band beginnt mit sehr einfachen finiten Elementen. In Kapitel 3 wird mit Hilfe der *Matrix-Steifigkeitsmethode* bereits eine Fülle von Aufgaben der *Strukturmechanik* gelöst, die sich mit dem mechanischen Verhalten *diskreter Systeme* befaßt. Dazu zählt auch die Berechnung von *Eigenfrequenzen* und *Eigenformen* diskreter Systeme (→*Strukturdynamik*).

Die Anwendung der FEM auf *kontinuierliche Systeme* (→*Kontinuumsmechanik*) ist wesentlich anspruchsvoller. In Kapitel 4 des ersten Bandes wird als Möglichkeit, das Gleichgewicht eines Körpers (*Kontinuums*) auszudrücken, das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* benutzt und die *Steifigkeitsmatrix* für linearelastische finite Elemente ermittelt.

Neben *Dreieckselementen höherer Ordnung* werden auch *Viereckselemente* der LAGRANGE- und SERENDIPITY-Klasse und *Übergangselemente* ausführlich im ersten Band diskutiert. Darüber hinaus wird die *konforme Abbildung* zur Erzeugung *krummliniger Elemente* eingesetzt.

Die meisten Übungsaufgaben können „von Hand“ ohne Hilfsmittel, d.h. unter Klausurbedingungen, gelöst werden. Sehr umfangreiche Übungen sind nur auszugsweise als Klausuraufgaben geeignet. Einige Aufgaben sind bewußt sehr einfach gestellt (und als Klausuraufgaben schon zu leicht), damit der „Neuling“ die prinzipielle Vorgehensweise schnell durchblicken kann und nicht hinter einer „black box“ steht und auf Ergebnisse wartet, denen er nur mißtrauisch gegenüberstehen kann.

Einige Übungsaufgaben enthalten im Anschluß an die „zu Fuß-Rechnung“ einen Computerausdruck. Hierbei wurde die Software „MAPLE V, Release 4“, verwendet. MAPLE ist ein „*mathematisches Formelmanipulations-Programm*“, mit dem interaktiv gearbeitet werden kann. Mit Hilfe solcher „Formelmanipulations-Systeme“ (FMS) ist es möglich, Berechnungen mit unausgewerteten Ausdrücken (*Symbolen*) durchzuführen.

Die sogenannte *Computer-Algebra* ist in den letzten Jahren verstärkt entwickelt worden – MAPLE etwa seit Anfang der 80-er Jahre. Weitere Programme sind MATHCAD (basierend auf MAPLE), MATHEMATICA, MACSYMA, REDUCE und AXIOM, die ebenfalls sehr leistungsstark und anwenderfreundlich sind. Je nach Einsatzgebiet bietet das eine oder andere System mehr oder weniger Vorteile.

Die zusammengestellten Übungsaufgaben sollen den Vorlesungsstoff ergänzen und vertiefen. Es werden auch Übungen aus Aufgabengebieten angeboten, die aus Zeitgründen in den Vorlesungen nicht behandelt werden können. Aus Platzgründen konnten nicht zu jeder Ziffer Übungsaufgaben abgedruckt werden, so daß eine Vielzahl von bereits ausgearbeiteten Aufgaben noch in der Schublade liegen muß.

Ergänzend zu den Vorlesungen und Übungen in FEM biete ich ein Praktikum „Praktische Einführung in FEM-Programme I, II“ für Studierende an, das mein Mitarbeiter, Herr Dipl.-Ing. U. NAVRATH, am Rechenzentrum der RWTH Aachen durchführt. Jedem Teilnehmer steht ein PC zur Verfügung, so daß ein intensives Einarbeiten in FEM-Programme möglich ist. Dem Rechenzentrum der RWTH Aachen sei an dieser Stelle für die Bereitstellung von Schulungsräumen und PCs gedankt. Ohne diese Unterstützung wäre die Durchführung eines solchen Praktikums nicht möglich.

Allen, die mit bestimmten FEM-Programmen in ihrer Berufspraxis arbeiten müssen, wie beispielsweise mit ABAQUS / ADINA / ANSYS / COSMOS / MARC / NASTRAN etc., etc. werden Spezialkurse empfohlen, die man aber erst dann effektiv besuchen kann, wenn man bereits die Grundlagen der FEM beherrscht.

Beispielsweise bietet die Firma CAD-FEM GmbH in Grafing bei München jährlich Schulungsseminare zum FEM-Programm ANSYS an. Als Referenten stehen Mitarbeiter der Firma CAD-FEM, Anwender aus der Industrie und Hochschullehrer zur Verfügung. So führe ich seit einigen Jahren ein Seminar über *viskoelastisches* und *viskoplastisches Verhalten (Inelastizität)* verschiedener

Werkstoffe zusammen mit einem Mitarbeiter der Firma CAD-FEM und einem Anwender aus der Glasindustrie durch. Die Erfahrungen, die ich hierbei sammle, kommen auch meinen Lehrveranstaltungen zugute. Aus diesem Grunde bin ich der Firma CAD-FEM dankbar, daß sie mich als Referenten eingeladen hat. Die meisten Kursteilnehmer(innen) sind Anwender(innen) aus der Industrie. Es sind aber auch Studierende und Doktoranden eingeladen, die nur eine geringe Teilnahmegebühr entrichten müssen.

Viele Anwender erwarten von FEM-Programmen Lösungen, die man kritiklos übernehmen kann. Eine Erhöhung der Anzahl der Elemente (*h-Methode*) erhöht den Rechenaufwand und muß nicht immer zu einer gewünschten Verbesserung der Ergebnisse führen, wie ausführlich in Übungsaufgaben diskutiert wird. Vielfach ist die Erhöhung des Polynomgrades der *shape functions* (*p-Methode*) erfolgreicher, wie an vielen Beispielen gezeigt wird. Schließlich ist auch die *r-Methode* (*repositioning*) ein wirksames Mittel zur Erhöhung der Genauigkeit von FEM-Lösungen. Hierbei bleibt die Anzahl der Elemente, der Knoten und auch der Freiheitsgrade pro Knoten erhalten, während die Knotenpunkte „*optimal*“ gegeneinander verschoben werden. Durch derartige Verschiebungen kann eine Netzverfeinerung an Stellen hoher Spannungskonzentration (Kerben, scharfe Übergänge etc.) erzeugt werden, während in weniger kritischen Bereichen das Netz aufgeweitet wird.

Bevor man ein aufwendiges FE-Programm selbst entwickelt, weil kein geeignetes kommerzielles Programm zur Verfügung steht, sollte man gründlich überlegen, ob nicht andere Verfahren mit geringerem Aufwand zum Ziel führen, insbesondere bei einfachen Randkonturen. Daher werden im Textteil und in Übungsaufgaben des ersten Bandes die *Finite-Differenzen-Methode* (FDM) und die Methode der *Übertragungsmatrizen* mit der FEM verglichen.

Aufgrund des reichhaltigen Angebotes von kommerziellen FE-Programmen halten viele Anwender grundlegende Kenntnisse in Mechanik, in Tensorrechnung und in numerischer Mathematik für weniger wichtig. Was nützt jedoch ein aufwendiges Rechenprogramm, wenn das mathematische Modell des Problems fraglich ist?

Leistungsfähige Programme, wie z.B. ABAQUS etc., berücksichtigen neben *physikalischen Nichtlinearitäten* auch *geometrische Nichtlinearitäten*. Somit muß der Anwender solcher FEM-Programme u.a. mit der *Theorie endlicher Verzerrungen* vertraut sein und als mathematisches Hilfsmittel die *Tensorrechnung* einsetzen können.

In beiden Bänden habe ich jedoch weitgehend die *Tensornotation* nicht verwendet, da Studierende im 5. Semester aufgrund ihres Studienplanes mit der Tensorrechnung noch nicht vertraut sind. An einigen Stellen im Textteil und auch in einigen Übungen habe ich mich jedoch der eleganten und bequemen Tensorrechnung bedient.

Allen Studierenden, die insbesondere zur Prüfungsvorbereitung meine Vorlesungs- und Übungsskripte kritisch durchgearbeitet haben, möchte ich danken. Sie haben durch ihre Kritik und einige Anregungen dazu beigetragen, daß der zweite Band die jetzt vorliegende Form besitzt.

Gedankt sei an dieser Stelle Herrn Dr.-Ing. W. HELISCH, Herrn Dipl.-Ing. U. NAVRATH und Herrn cand.ing. M. WIEHN, die mit unermüdlicher Sorgfalt und großem Geschick die reproduktionsreife Vorlage auf einem PC-486 erstellt haben.

Die vielen Skizzen hat Herr T. HÖFS, Auszubildender zum Technischen Zeichner, mit den Programmen AutoCAD und CorelDraw 5.0 angefertigt. Für seine Unterstützung möchte ich mich bedanken.

Die gesamte redaktionelle Koordination lag in den Händen von Herrn Dipl.-Ing. U. NAVRATH.

Dem Springer-Verlag, insbesondere Herrn Dr. D. MERKLE und Herrn Dr. H. RIEDESEL sei gedankt für die Aufnahme meiner Manuskripte und die verständnisvolle und vorbildliche Zusammenarbeit, die ich auch bei der Drucklegung meines Buches „Kontinuumsmechanik“ im Jahre 1993 als angenehm empfand. Herrn H. SCHOENEFELDT und Frau K. KLOSE, verantwortlich für die technische Produktion des Buches, danke ich für die reibungsfreie Koordination.

Aachen, im Dezember 1997

Josef Betten

Inhaltsverzeichnis

Band 2

5	Variationsrechnung	1
5.1	EULERSche Differentialgleichung für Funktionale der Form $F(x, u, u', \dots, u^{(n)})$	1
5.2	Isoperimetrische Probleme	13
5.3	Funktionale mit mehreren Argumentfunktionen	17
5.4	Erweiterung auf Mehrfachintegrale	18
6	Energiemethoden / Variationsprinzip	23
6.1	Anwendung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials auf diskrete Systeme	24
6.2	Prinzip der virtuellen Arbeit	32
6.3	Die Sätze von CASTIGILIANO	41
6.4	Anwendung des ersten Satzes von CASTIGILIANO auf ein finites Balkenelement	44
6.5	Anwendung des ersten Satzes von CASTIGILIANO auf ein elastisches Kontinuum	55
6.6	Allgemeinere Formulierung des Prinzips vom stationären Wert des Gesamtpotentials	56
6.7	Das HAMILTONSche Prinzip	66
7	Näherungsverfahren	73
7.1	Das klassische RAYLEIGH-RITZ-Verfahren und die FE-Methode	73
7.2	Verfahren der gewichteten Residuen, insbesondere GALERKIN, und die FEM	112
7.3	Existenz eines Variationsprinzips	137
7.4	Näherungsfehler und Konvergenz	144
7.5	Numerische Integration	150
7.5.1	Einfachintegrale	151
7.5.2	Mehrdimensionale Integration	189
8	Nichtlinearitäten	238
8.1	Verschiedene Lösungsmethoden	240
8.2	Fixpunktiteration	248
8.3	Nichtlineare diskrete Systeme	252
8.4	Geometrische Nichtlinearität	267

8.5	Inelastisches Verhalten anisotroper Werkstoffe	272
8.6	Zeitschrittverfahren	280
	Lösungen der Übungsaufgaben	289
	Literaturverzeichnis	291
	Sachwortverzeichnis	297

Band 1

1	Einführung	1
2	Matrixmethoden	11
3	Matrix-Steifigkeitsmethode	15
3.1	Steifigkeitsmatrizen von Federn	16
3.2	Steifigkeitsmatrizen für Stabelemente	35
3.3	Steifigkeitsmatrizen für Fachwerke	45
3.4	Steifigkeitsmatrizen für Biegebalken	59
3.5	Vergleich zwischen Steifigkeits- und Übertragungsmatrix	72
3.6	Inhomogene Randbedingungen	83
4	Elastisches Kontinuum	85
4.1	Dreieckselement für ebene elastische Probleme	86
4.2	Verschiebungsansätze höherer Ordnung	112
4.2.1	Quadratischer Verschiebungsansatz	113
4.2.2	Kubischer Verschiebungsansatz	116
4.3	Natürliche Koordinaten im finiten Dreieckselement (Flächenkoordinaten)	116
4.4	Rechteckelemente der LAGRANGE-Klasse	126
4.5	Rechteckelemente der SERENDIPITY-Klasse	139
4.6	Übergangselemente	146
4.7	Isoparametrische finite Elemente	153
4.8	Einsatz konformer Abbildungen in der FEM	163
4.9	Tetraederelemente	170
4.10	Hexaederelemente	183
4.11	Pentaederelemente	209
4.12	Isoparametrische räumliche Elemente	217
	Lösungen der Übungsaufgaben	235
	Literaturverzeichnis	389
	Sachwortverzeichnis	393